第二部分 代数

【考试情况总结】第二部分 初等代数共 49 题

一、数与代数式（16 道）

1．乘方、开方运算（1 道）

2．绝对值的的概念与性质（2 道）

3．复数的基本概念与简单运算（8 道）

4．简单代数公式（5 道）

二、集合与函数（6）

1．集合（1 道） 2．函数（5 道）

三、代数方程（9 道）

1．一元二次方程（5 道） 2．二元一次方程组（1 道）

3．一元二次函数（4 道）

四、不等式（1 道）

五、数列（5 道）

六、排列与组合（2 道）

七、概率初步（9 道）

1．等可能事件的概率（7 道） 2．简单概率公式（2 道）

一、数和代数式

［内容综述］

1．实数的运算

（1）乘方与开方（乘积与分式的方根，根式的乘方与化简）

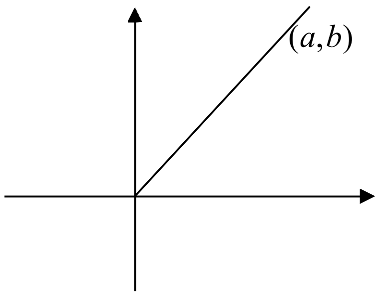
$$a^x a^y = a^{x+y}, \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, (ab)^x = a^x b^x, (a^x)^y = a^{xy}$$

（2）绝对值

$$|a| = \begin{cases} a, a > 0 \\ 0, a = 0 \\ -a, a < 0 \end{cases}, \quad |a+b| \le |a| + |b|, \ -|a| \le a \le |a|$$

$$-|a| \le a \le |a|; \quad |a+b| \le |a| + |b|; \quad |a+b| \ge |a| - |b|$$

2．复数的运算及其几何意义（虚数单位、实部、虚部、纯虚数、共轭复数、模、幅角）



$i^2 = -1$，$z = a + ib$，$\bar{z} = a - ib$，

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$，$\tan\alpha = \dfrac{b}{a}$

加减：

$z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$, $z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$；

数乘：$z = a + bi$，$\lambda z = \lambda a + \lambda bi$；

乘法：$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$；

除法：$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{a_2^2 + b_2^2}$。

$$z_1 = |z_1|\left(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1\right), \quad z_2 = |z_2|\left(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2\right)$$

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|\left(\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i\sin(\alpha_1 + \alpha_2)\right);$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left(\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\right)$$

$|z - z_0| = 1$

3．几个常用公式（和与差的平方、和与差的立方、平方差、立方和、立方差等）

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$；$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$；

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$；$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$；

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$；

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$；

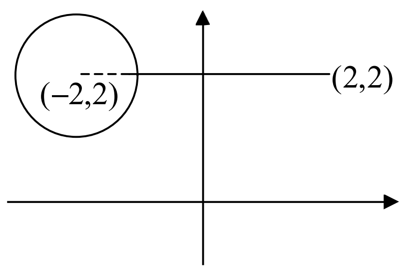
$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{1}{2}n(n+1)$.

[典型例题]

1．若 $z \in C$ 且 $|z + 2 - 2i| = 1$，则 $|z - 2 - 2i|$ 的最小值是（　　）.

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

答：B.



分析：　如图，方程

$|z + 2 - 2i| = |z - (-2 + 2i)| = 1$

表示复数 z 对应的点在以点 $(-2,2)$ 为圆心、半径是1的圆周上，而

$$|z - 2 - 2i| = |z - (2 + 2i)|$$

最小，是指复数 z 对应的点到点 $(2,2)$ 的距离最短，由图可知此最短距离为3.

2．若 $x^3 + x^2 + ax + b$ 能被 $x^2 - 3x + 2$ 整除，则

A. $a = 4, b = 4$　　B. $a = -4, b = -4$

C. $a = 10, b = -8$　　D. $a = -10, b = 8$

答：D.

分析：因为$f(x)=x^3+x^2+ax+b=(x^2-3x+2)u(x)$，且$1,2$是$x^2-3x+2=0$的解，所以

$$f(1)=a+b+2=0，f(2)=2a+b+12=0，$$

解得 $a=-10,b=8$.

[样题与真题]

[例题]

例 1.（2003）已知实数x和y满足条件$(x+y)^{999}=-1$和$(x-y)^{1000}=1$，则$x^{1000}+y^{1000}$的值是（　　）.

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

答：C.

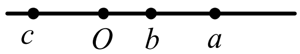
分析：由于$(x+y)^{999}=-1$，所以$x+y=-1$．而由$(x-y)^{1000}=1$可知$x-y=1$或$x-y=-1$．解方程组

$$\begin{cases}x+y=-1,\\x-y=1\end{cases} \text{和} \begin{cases}x+y=-1,\\x-y=-1,\end{cases}$$

得 $\begin{cases}x=0,\\y=-1\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x=-1,\\y=0,\end{cases}$ 从而 $x^{1000}+y^{1000}=1$.

例 2. （2011）设O为坐标轴的原点，a,b,c的大小关系如图所示，则$\left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right|-\left|\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right|+\left|\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right|$的值是（　　）.

A. 0　　　　B. $\dfrac{2}{a}$



C. $\dfrac{2}{b}$　　　　D. $\dfrac{2}{c}$

答：B.

分析:本题主要考查了实数与数轴上的点之间的对应关系及绝对值的概念.

由图知，$c<0<b<a$，所以

$$\left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right|-\left|\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right|+\left|\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right|=(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})-(\frac{1}{b}-\frac{1}{c})+(\frac{1}{a}-\frac{1}{c})=\frac{2}{a}$$

.

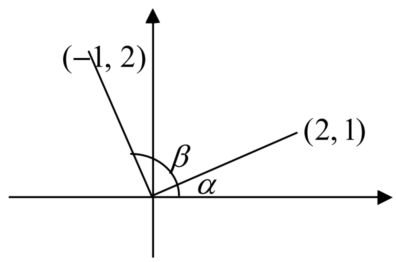
例 3.（2004）$\arg z$ 表示 z 的幅角，今又

$\alpha=\arg(2+\mathrm{i}), \beta=\arg(-1+2\mathrm{i})$，则 $\sin(\alpha+\beta)=$（　　）.

A. $-\dfrac{4}{5}$　　　　B. $-\dfrac{3}{5}$　　　　C. $\dfrac{4}{5}$　　　　D. $\dfrac{3}{5}$

答：D.

分析：　如图，易知



$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}, \cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$\sin\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}, \cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{5}}$$

所以 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{3}{5}$.

例 4.（2005）复数 $z=(1-\mathrm{i})^2$ 的模 $|z|=($　　$)$。

A．4　　B．$2\sqrt{2}$　　C．2　　D．$\sqrt{2}$

分析：因为$|1-\mathrm{i}|=\sqrt{2}$，所以$\left|(1-\mathrm{i})^2\right|=|1-\mathrm{i}|^2=2$，即正确选项为C.

例5.（2006）复数$z=\dfrac{1}{\mathrm{i}}$的共轭复数$\overline{z}$是（　　）.

A．i　　B．$-\mathrm{i}$　　C．1　　D．-1

答：A

分析：由于$z=\dfrac{1}{\mathrm{i}}=-\mathrm{i}$，所以$\overline{z}=\mathrm{i}$.

例6.（2011）若复数$z_1=\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$，$z_2=\dfrac{(1+\mathrm{i})^2}{(1-\mathrm{i})^2}$，则$|z_1-z_2|=$（　　）.

A. 2　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 1

答：B.

分析：本题主要考查了复数的除法运算与复数模的计算.

因为 $z_1=\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{(1-\mathrm{i})^2}{2}=-\mathrm{i}$,

$$z_2=\frac{(1+\mathrm{i})^2}{(1-\mathrm{i})^2}=\left[\frac{(1+\mathrm{i})^2}{2}\right]^2=-1,$$

所以 $|z_1-z_2|=|-1+\mathrm{i}|=\sqrt{2}$.

例7.（2005）已知$x-y=5$且$z-y=10$，则

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=(\quad)。$$

A．50　　B．75　　C．100　　D．105

答：B.

分析：由于$x-y=5, z-y=10$，所以$z-x=5$，从而

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$$
$$=\frac{1}{2}[(x-y)^2+(z-y)^2+(z-x)^2]=75.$$

例 8．（2007）当 $x\neq -1$ 和 $x\neq -2$ 时，$\frac{x-1}{x^2+3x+2}=\frac{m}{x+1}+\frac{n}{x+2}$恒成立，则（ A ）.

A．$m=-2,n=3$　　B．$m=-3,n=2$

C．$m=2,n=-3$　　D．$m=3,n=-2$

分析：$\frac{x-1}{x^2+3x+2}=\frac{m}{x+1}+\frac{n}{x+2}$

$$=\frac{m(x+2)+n(x+1)}{(x+1)(x+2)}=\frac{(m+n)x+(2m+n)}{x^2+3x+2},$$

所以，$(m+n)x+(2m+n)=x-1$，于是比较系数得 $m+n=1,2m+n=-1$，

解得 $m=-2,n=3$.

例 9.（2011） 若$x=\frac{\sqrt{5}-3}{2}$，则代数式$x(x+1)(x+2)(x+3)$的值为（　　）.

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

答：A.

分析：本题主要考查了代数运算及两数平方差公式.

$$x(x+1)(x+2)(x+3)=\frac{(\sqrt{5}-3)(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}+3)}{2^4}$$

$$=\frac{(5-9)(5-1)}{16}=-1.$$

二、集合与函数（微积分）

［内容综述］

1．集合运算（交集、并集、补集、全集）

$$A\bigcap B,\ A\bigcup B, \overline{A}(C_I(A)), A\bigcup B\bigcup C=A\bigcup(B\bigcup C),$$

$$A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C), \overline{A\bigcup B}=\overline{A}\bigcap\overline{B}$$

2．函数

（1）概念（定义、两要素、图形、反函数）

$\{(x,y)\big|y=f(x),x\in D\}$，$y=f^{-1}(x)$

（2）简单性质（有界性、单调性、<u>奇偶性、周期性</u>）

$(x,f(x))\quad(-x,f(-x))=(-x,-f(x))$；

$(-x,f(-x))=(-x,f(x))$

$$g(x)=f(ax+b)=f(ax+b+T)$$

$$=f(a(x+\frac{T}{a})+b)=g(x+\frac{T}{a})$$

（3）<u>幂函数、指数函数、对数函数</u>（含义、性质、常用公式）

$$y=x^a,\ y=a^x,\ y=\log_a x, y=\lg x, y=\ln x$$

$$\ln xy=\ln x+\ln y,\ \ln\frac{x}{y}=\ln x-\ln y,$$

$\ln x^{y} = y\ln x, \log_{a} x = \dfrac{\log_{b} x}{\log_{b} a}$

[典型例题]

1．设$f(x)$是周期为2的偶函数，且在$[0,1]$上单调递减，则$f(-\frac{1}{2}), f(1), f(2)$的大小关系是（　　）.

A．$f(-\frac{1}{2}) < f(1) < f(2)$　　B．$f(1) < f(-\frac{1}{2}) < f(2)$

C．$f(-\frac{1}{2}) < f(2) < f(1)$　　C．$f(1) < f(2) < f(-\frac{1}{2})$

答：B.

分析：因为函数$f(x)$在$[0,1]$上单调递减，所以$f(1) < f(\frac{1}{2}) < f(0)$．又因为$f(x)$是周期为$2$的偶函数，所以$f(-\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}), f(2) = f(0)$，从而 $f(1) < f(-\frac{1}{2}) < f(2)$.

2．已知$a \neq 0$，函数$f(x) = ax^{3} + bx^{2} + cx + d$的图像关于原点对称的充分必要条件是[D]

(A)$b = 0$　　(B)$c = 0$　　(C)$d = 0$　　(D)$b = d = 0$

分析：函数$f(x) = ax^{3} + bx^{2} + cx + d$的图像关于原点对称的充分必要条件是函数$f(x)$为奇函数，故其偶次项的系数为$0$，即$b = d = 0$.

注：也可利用$\begin{cases} f(0) = 0, \\ f(-1) = -f(1) \end{cases}$求得$b = d = 0$，在说明当$b = d = 0$时，$y = f(x)$的图像关于原点对称.

3．设$a<0,b<0$，且$a^2+b^2=7ab$，那么$\ln\frac{1}{3}|a+b|=$［B］

(A) $\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)$　　(B) $\ln\frac{1}{2}(ab)$

(C) $\frac{1}{3}(\ln a+\ln b)$　　(D) $\frac{1}{3}\ln(ab)$

分析：由于$a<0,b<0$，所以选项(A)(C)不正确．

根据 $\ln\left|\frac{1}{3}(a+b)\right|=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{3}(a+b)\right|^2=\frac{1}{2}\ln\frac{a^2+b^2+2ab}{9}$

及$a^2+b^2=7ab$可知$\ln\left|\frac{1}{3}(a+b)\right|=\frac{1}{2}\ln(ab)$．

【真题与样题】

[例题]

例 1．（2007）集合$\{0,1,2,3\}$的子集的个数为（　　）

A．14　　B．15　　C．16　　D．18

答：C.

分析：由1个元素构成的子集有4个；由2个元素构成的子集有6个；由3个元素构成的子集有4个；再加上空集与全集，共$4+6+4+2=16$个．

一般地，　n个元素的集合所有的子集个数为2^n．

例 2．（2005）设函数$f\left(x\right)$的定义域是$\left[0,1\right]$，则函数$g\left(x\right)=\sqrt{1-x}\cdot f\left(\sin\pi x\right)+\sqrt{1+x}\cdot f\left(1+\cos\pi x\right)$的定义域是（　　）．

A. $|x|\leqslant 1$　　　　B. $0\leqslant x\leqslant 1$

C. $|x|\leqslant 0.5$　　　　D. $0.5\leqslant x\leqslant 1$

分析：考虑 $\begin{cases}1-x\geqslant 0,\\ 1+x\geqslant 0,\\ 0\leqslant \sin\pi x\leqslant 1,\\ 0\leqslant 1+\cos\pi x\leqslant 1\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 1,\\ 0\leqslant \sin\pi x\leqslant 1,\\ -1\leqslant \cos\pi x\leqslant 0,\end{cases}$ 解得 $0.5\leqslant x\leqslant 1$．即正确选项为 D.

注：$x=-1$ 也是 $g(x)$ 定义域中的点.

例 3.（2008．16）设 $f(x)=\begin{cases}x, & x>0\\ 1-x, & x<0\end{cases}$，则有（　　）.

A. $f(f(x))=(f(x))^2$　　　　B. $f(f(x))=f(x)$

C. $f(f(x))>f(x)$　　　　D. $f(f(x))<f(x)$

分析：本题是简单函数题，考查了函数求值问题.

因为 $f(x)=\begin{cases}x, & x>0,\\ 1-x, & x<0,\end{cases}$ 易知 $f(x)>0$，所以

$f(f(x))=\begin{cases}f(x), & f(x)>0,\\ 1-f(x), & f(x)<0\end{cases}=f(x)$．故正确选项为 B.

注：利用特殊值代入法与排除法更简单．取 $x=2$，则 $f(2)=2, f(f(2))=f(2)=2$，这时选项 A，C，D 都不成立．故正确选项为 B.

例 4.（样题）函数 $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$ 是[B]

(A)周期函数　　　　(B)奇函数

(C)偶函数　　　　(D)单调减少函数

分析：$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})=\ln\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$

$$=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x)$$

注：排除法与特殊值代入法.

$$f(1)=\ln(\sqrt{2}+1)>0,\ f(-1)=\ln(\sqrt{2}-1)<0.$$

例 5.（2010）函数 $f(x)$ 是奇函数，$g(x)$ 是以 4 为周期的周期函数，且 $f(-2)=g(-2)=6$. 若 $\dfrac{f(0)+g(f(-2)+g(-2))}{g^2(20f(2))}=\dfrac{1}{2}$，则 $g(0)=$（　　）.

A. 2　　　　B. 1　　　　C. 0　　　　D. -1

答 A.

分析：因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(0)=0$，且由 $f(-2)=6$ 知 $f(2)=-6$．又 $g(-2)=6$，所以

$$\frac{f(0)+g(f(-2)+g(-2))}{g^2(20f(2))}=\frac{g(12)}{g^2(-120)}.$$

由于 $g(x)$ 的周期为 4，所以 $g(12)=g(-120)=g(0)$.

由题设知 $\dfrac{g(0)}{g^2(0)}=\dfrac{1}{2}$，解得 $g(0)=2$.

例 6.（2011）若函数 $f(x)$ 是周期为 6 的奇函数，则

$\sin\left(f(-7)+f(1)+\dfrac{\pi}{12}\right)\cdot\cos\left(f(6)+\dfrac{\pi}{12}\right)$ 的值等于（　　）.

A. $\dfrac{1}{4}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

答： A.

分析：本题主要考查了奇函数的性质、周期函数的概念、三角函数的倍角公式和特殊角的三角函数值.

因为函数$f(x)$是周期为6的奇函数，所以$f(6)=f(0)=0$，

$$f(-7)+f(1)=f(-1)+f(1)=0.$$

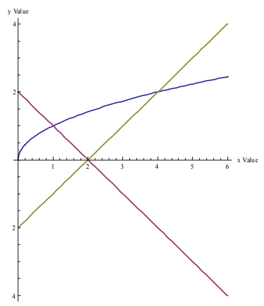
从而

$$\sin\left(f(-7)+f(1)+\frac{\pi}{12}\right)\cdot\cos\left(f(6)+\frac{\pi}{12}\right)$$

$$=\sin\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{4}$$

例 7.（2009. 16）若$f(x)=\max\{|x-2|,\sqrt{x}\}$，则函数$f(x)$的最小值等于（　　）.

A. 0　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2



分析：本题是微积分中函数部分的问题，考查了函数求值问题及简单函数的图形.

如图，函数$f(x)$的最小值在直线$y=2-x$与曲线$y=\sqrt{x}$的交点处取到. 由$2-x=\sqrt{x}$得$x=1$，所以要求的最小值为1.

正确选项为 **C**.

注：本题用验证法更为简单.

例 8.（2003）函数 $y=f(1+x)$ 与 $y=f(1-x)$ 的图形关于（　　）.

A．直线 $x=1$ 对称　　　　B．直线 $x=-1$ 对称

C．直线 $x=0$ 对称　　　　D．直线 $y=0$ 对称

答：C.

分析：作为选择问题，利用特殊值代入法处理本题是最有效的．如取 $f(x)=x$，则 $y=f(1+x)=1+x$ 与 $y=f(1-x)=1-x$ 是两条关于 y 对称的直线．故正确选项为 C.

三、代数方程

[内容综述]

1．二元一次方程组解的存在性

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

当 $\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$ 时，有唯一解；当 $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$ 时，无解；

当 $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$ 时，无穷多解.

2．一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$

（1）求根公式（判别式）$\Delta=b^2-4ac$；$x_{\pm}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

（2）根与系数的关系 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$，$x_1x_2=\dfrac{c}{a}$

3．二次函数的图像（开口、对称轴、顶点坐标）

$$y=ax^2+bx+c=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

[典型例题]

1．设 $c\neq 0$，若 x_1,x_2 是方程 $x^2+bx+c=0$ 的两个根，求

$x_1^2+x_2^2,|x_1-x_2|,\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{x_1}{x_2}$，$x_1^3+x_2^3$.

分析：根据韦达定理可知 $x_1+x_2=-b, x_1x_2=c$，所以

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=b^2-2c;$$

$$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{x_1^2+x_2^2-2x_1x_2}=\sqrt{b^2-4c};$$

$$\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_2^2+x_1^2}{x_1x_2}=\frac{b^2-2c}{c}.$$

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)=b(3c-b^2)$$

2．指数方程组 $\begin{cases}4^x2^y=16,\\ 2^x3^y=6\end{cases}$ 的解[A]

(A)只有一组　　(B)只有两组

(C)有无穷多组　　(D)不存在

分析：在方程组 $\begin{cases}4^x2^y=16,\\ 2^x3^y=6\end{cases}$ 中每个方程的两端取对数，得

$$\begin{cases}x\ln 4+y\ln 2=\ln 16,\\ x\ln 2+y\ln 3=\ln 6,\end{cases}$$

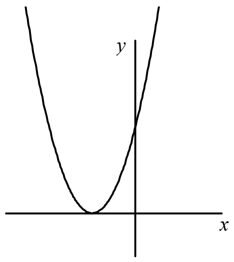
由于 x 与 y 的系数不成比例，所以此方程组只有一组解.

【真题与样题】

[例题]

例 1.（2010）若图中给出的函数 $y=x^2+ax+a$ 的图像与 x 轴相切，则 $a=$（　）.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 4



答　D.

分析：由于 $y=x^2+ax+a$ 的图像与 x 轴相切，所以方程 $x^2+ax+a=0$ 有重根，故

$\Delta=a^2-4a=0$．由图知 $a\neq0$，所以 $a=4$．

例 2．（2004）已知 $ab\neq1$，且满足 $2a^2+2008a+3=0$ 和 $3b^2+2008b+2=0$，则（　）.

A. $3a-2b=0$　　B. $2a-3b=0$

C. $3a+2b=0$　　D. $2a+3b=0$

答：B.

分析：　本题主要考查了一元二次方成的求根公式.

根据求根公式得

$$a=\frac{-2008\pm\sqrt{2008^2-24}}{4},b=\frac{-2008\pm\sqrt{2008^2-24}}{6}.$$

当 $a=\dfrac{-2008+\sqrt{2008^2-24}}{4},b=\dfrac{-2008-\sqrt{2008^2-24}}{6}$

时，易知$ab=1$，不满足条件．类似可知

$$a=\frac{-2008-\sqrt{2008^2-24}}{4}, b=\frac{-2008+\sqrt{2008^2-24}}{6}$$也不

满足条件．所以a,b表达式中根号前的符号一致，从而

$2a-3b=0$．故正确选项为 B．

例 3．（2008）两个正数$a,b(a>b)$的算术平均值是其几何平均

值的2倍，则与$\frac{a}{b}$最接近的整数是（　）．

A．12　　B．13　　C．14　　D．15

分析：本题是代数题，考查了算术平均数与几何平均数的概念、一元二次方程的性质．

根据题意得 $\frac{a+b}{2}=2\sqrt{ab}$，所以$\left(\frac{a}{b}\right)^2-14\left(\frac{a}{b}\right)+1=0$．解得$\frac{a}{b}=7\pm 4\sqrt{3}$（负号舍去），即与$\frac{a}{b}$最接近的整数是$14$．故正确选项为 C．

例 4．（2006）方程$x^2-2006|x|=2007$所有实数根的和等于（ C ）．

A．　2006　　B．　4　　C．　0　　D．-2006

分析：考查绝对值、代数方程的概念及对称性运用．

解 1：方程$x^2-2006|x|=2007$等价于方程$|x|^2-2006|x|-2007=0$．显然，该二次方程必有实数根．又由于该方法的左端关于正、负x的值不变，通常称为关于正、负

x是对称的． 因此，若x是方程的一个根，则$-x$也为其根．因此，方程的根成对出现，且互为相反数，而每一对相反数之和为0，所以方程$x^2-2006|x|=2007$所有实数根之和等于0．

解2；亦可利用二次代数方程求解．由二次方程根与系数的关系：方程 $|x|^2-2006|x|-2007=0$ 之根为：

$$|x|=\frac{2006\pm\sqrt{2006^2+4\times 2007}}{2}.$$

由绝对值性质可知，则原方程的根满足条件为：

$$|x|=1003+\sqrt{1003^2+2007}.$$

该方程之根为：$x_1=1003+\sqrt{1003^2+2007}$，$x_2=-1003-\sqrt{1003^2+2007}$．

所以方程$x^2-2006|x|=2007$的所有实数根之和$x_1+x_2=0$．

例5．（2007）方程$\sqrt{x+y-2}+|x+2y|=0$的解为（ D ）

A．$\begin{cases}x=0\\y=2\end{cases}$ B．$\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}$ C．$\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$ D．$\begin{cases}x=4\\y=-2\end{cases}$

分析：考查绝对值，根式的概念及简单代数方程求解．

由 $\sqrt{x+y-2}+|x+2y|=0$，得等价联立方程

$$\begin{cases}\sqrt{x+y-2}=0\\|x+2y|=0\end{cases}$$

即 $\begin{cases}x+y-2=0\\x+2y=0\end{cases}$，求解得：$\begin{cases}x=4\\y=-2\end{cases}$

注：作为选择题，选项验证法可能是本题最直接的解法．

例 6.（2003）函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调减的充要条件是（　　）.

A．$a<0$，且 $b\geqslant 0$　　　　B．$a<0$，且 $b\leqslant 0$

C．$a>0$，且 $b\geqslant 0$　　　　D．$a>0$，且 $b\leqslant 0$

答：D.

分析：函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调减意味着其图像的开口朝上和顶点的横坐标非负，所以 $a>0$ 且 $-\dfrac{b}{2a}\geq 0$，故 $a>0$，且 $b\leq 0$．即正确选项为 D.

注：如果不会做时，您也不要猜选项 A 或选项 B．因为您肯定知道开口朝下的抛物线不会在 $(-\infty,0]$ 上单调减.

例 7.（2008）抛物线 $y=-x^2+4x-3$ 的图象不经过（　　）.

A．第一象限　B．第二象限　C．第三象限　D．第四象限

分析：由于抛物线 $y=-x^2+4x-3$ 的开口朝下、对称轴是 $x=-\dfrac{b}{2a}=2$、顶点坐标为 $(2,1)$，所以此抛物线只可能不经过第二象限．故正确选项为 B.

例 8.（样题）设 $0\leq x\leq 3$，则函数 $y=(x-2)^2-2$ 的最大值为 [C]

(A) -2　　(B) -1　　(C) 2　　(D) 3

分析：　如图：最大值只可能在端点取到.

四、不等式

[内容综述]

1．不等式的基本性质及基本不等式（算术平均数与几何平均数、绝对值不等式）

性质：$a>b,k>0\Rightarrow ka>kb;\ a>b,k<0\Rightarrow ka<kb;$

$$a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d,a-d>b-c$$

基本不等式：$\frac{1}{2}(a+b)\geqslant\sqrt{ab}$；$|a+b|\leqslant|a|+|b|$

2．几种常见不等式的解法

绝对值不等式、一元二次不等式、分式不等式、指数不等式、对数不等式等

$ax^2+bx+c>0$，$a>0$；

$|f(x)|>a>0\Leftrightarrow f(x)>a,f(x)<-a$

[典型例题]

1．若$x>0$，则$\frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{x}$的最小值为

A．1　　B．2　　C．4　　D．6

答：C.

分析：$\frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{x}=2(x+\frac{1}{x})\geqslant 2\times 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=4$.

2．已知集合$A=\{x\,\big|\,|x-2|<3\}$，集合$B=\{x\,|\,x^2+(1-a)x-a<0\}$，若$B\subset A$，求$a$得取值范围.

分析：$x_{1,2}=\frac{a-1\pm\sqrt{(1-a)^2+4a}}{2}=\frac{a-1\pm|1+a|}{2}$.

当 $a<-1$ 时， $B=\{x|a<x<-1\}$ ； 当 $a\geq -1$ 时， $B=\{x|-1<x<a\}$.

所以当$a<-1$时，不会有$B\subseteq A$；当$a\geq -1$时，若$B\subseteq A$，则$a\leq 5$.

五、数列

［内容综述］

1．数列的概念（数列、通项、前n项的和、各项的和、数列与数集的区别）

$$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots,\ S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$

2．等差数列

（1）概念（定义、通项、前n项的和）；（2）简单性质：（等差）中项公式、平均值

$$a_{n+1}-a_n=d,\ a_n=a_1+(n-1)d,\ S_n=na_1+\frac{1}{2}n(n-1)d,$$

$$a_{n-k}+a_{n+k}=2a_n,\ \frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}=\frac{1}{2}(a_1+a_n)$$

3．等比数列

（1）概念（定义、通项、前n项的和）；（2）简单性质：（等比）中项公式

$$a_n\neq 0,\frac{a_{n+1}}{a_n}=q,\ a_n=a_1q^{n-1},S_n=a_1\frac{1-q^n}{1-q}\ ;\ a_{n-k}a_{n+k}=a_n^2$$

【典型例题】

1. 设$\{a_n\}$是一等差数列，且$a_2+a_3+a_{10}+a_{11}=64$，求a_6+a_7和S_{12}.

分析：由于$a_6+a_7=a_3+a_{10}=a_2+a_{11}$，所以

$$a_6+a_7=\frac{a_2+a_3+a_{10}+a_{11}}{2}=32;$$

$$S_{12}=a_1+a_2+\cdots+a_{11}+a_{12}=6(a_6+a_7)=192.$$

2. 设$\{a_n\}$是一等比数列，且$a_3=12, a_5=48$，求a_1, a_{10}和a_2a_6.

分析：设数列$\{a_n\}$的公比为q，则$\frac{a_5}{a_3}=q^2=4$，所以

$$a_1=\frac{a_3}{q^2}=\frac{12}{4}=3;$$

$$a_{10}=a_1q^9=3\times 2^9=1536 \text{ 或}$$

$$a_{10}=a_1q^9=3\times(-2)^9=-1536;$$

$$a_2a_6=a_3a_5=12\times 48=576.$$

【真题与样题】

[练习题]

例 1.（2005）三个不相同的非0实数a,b,c成等差数列，又a,c,b恰成等比数列，则$\frac{a}{b}$等于（　　）.

A. 4　　　B. 2　　　C. -4　　　D. -2

答：A.

分析：根据条件可知$2b=a+c, c^2=ab$，从而

$$\frac{a}{b}=(\frac{c}{b})^2，2=\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=(\frac{c}{b})^2+\frac{c}{b}，$$

由于$\frac{c}{b}\neq 1$，所以解得 $\frac{c}{b}=-2$，$\frac{a}{b}=4$．即正确选项为 A.

注：根据条件$ab=c^2$，所以$\frac{a}{b}>0$，故选项 C，D 可被排除．又有$2b=a+c$可知$2=\frac{a}{b}+\frac{c}{b}$，且$\frac{c}{b}\neq 0$，故$\frac{a}{b}\neq 2$，这样选项 B 也被排除．故正确选项为 A.

例 2.（2006）设n为正整数，在1与$n+1$之间插入n个正数，使这$n+2$个数成等比数列，则所插入的n个正数之积等于（　）.

A．$(1+n)^{\frac{n}{2}}$　　B．$(1+n)^n$　　C．$(1+n)^{2n}$　　D．$(1+n)^{3n}$

答：A

分析：（本题是代数题．考查了乘方运算的性质、等比数列的概念和通项公式）

设此等比数列的公比为q，则$q^{n+1}=n+1$，即$q=\left(n+1\right)^{\frac{1}{n+1}}$，所以

$$qq^2q^3\cdots q^n=q^{\frac{1}{2}n(n+1)}=\left(n+1\right)^{\frac{n}{2}}.$$

注：特殊值代入法，取$n=1$，则数列为$1,\sqrt{2},2$，插入的数为$\sqrt{2}=(1+1)^{\frac{1}{2}}$．即只有选项 A 满足.

例 3.（2011）已知数列$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$的通项是

$a_n = \dfrac{2n+1+(-1)^{n+1}}{4}$，则该数列前101项的和等于（　　）.

A. 2651　　B. 2601　　C. 2551　　D. 2501

答：B.

分析：本题主要考查了等差数列前n项和公式、组合法.

$$\text{因为}\sum_{n=1}^{101}(2n+1) = \frac{3+203}{2}\times 101 = 10403，$$

$$\sum_{n=1}^{101}(-1)^{n+1} = (1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+1 = 1，$$

所以 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{101} = \dfrac{1}{4}\left(10403+1\right) = 2601$.

六、排列、组合、二项式定理

[内容综述]

1．分类求和原理与分步求积原理

2．排列与排列数

（1）定义;（2）公式 $A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$

注 阶乘（全排列）$A_m^m = m!$

3．组合与组合数

（1）定义;（2）公式; $A_n^m = C_n^m A_m^m$, $C_n^m = \dfrac{A_n^m}{A_m^m}$

（3）基本性质：$C_n^m = C_n^{n-m}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$

4．二项式定理：$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^k b^{n-k}$

【典型例题】

1．5名男生和2名女生拍成一排照相.

（1）共有多少种排法？（A_7^7）

（2）男生甲必须站在一端，且两女生必须相邻，有多少种排法？

（$A_2^2(A_5^5A_2^2)$）

2．100件产品中，只有3件次品，从中任取3件，

（1）恰有一件次品的取法有多少种？$C_3^1C_{97}^2$

（2）至少有一件次品的取法有多少种？ $C_{100}^3-C_{97}^3$

（3）至多有两件次品的取法有多少种？$C_{100}^3-C_3^3$

3．求$(1+2\sqrt{x})^9$展开式中所有无理项系数之和.

分析：无理项指的是x的指数是非整数的项，根据二项式定理可知要求的和为

$$S=2C_9^1+2^3C_9^3+2^5C_9^5+2^7C_9^7+2^9C_9^9.$$

4．如果$(1-ax)^7$的展开式中x^3的系数等于$\frac{7}{25}$，那么a的值是（　　）.

A．5　　（B．-5　　C．$\frac{1}{5}$　　D．$-\frac{1}{5}$

答：D.

分析：本题考查了二项式定理的展开式.

由于 $(1-ax)^7=\sum_{k=0}^{7}C_7^k(-1)^k a^k x^k$，所以 $k=3$ 对应的项是 $-C_7^3a^3x^3=-35a^3x^3$．根据题意可知 $-35a^3=\frac{7}{25}$，所以 $a=-\frac{1}{5}$．故正确选项为 D.

【真题与样题】

例 1.（2007）48支足球队，等分为8组进行阶段赛，每组中的各队之间都要比赛一场．小组赛比赛的总场数是（ B ）.

A．48　　B．120　　C．240　　D．288

分析：每组的各队之间要比赛 $C_6^2=\frac{6\times5}{2}=15$ 场，8组共赛 $15\times8=120$ 场.

例 2.（样题）5棵大小不同的柳树，6棵大小不同的杨树，载到5坑内，一坑一棵，5个坑内至多载两棵柳树，有多少种载法？

$(C_6^5+C_5^1C_6^4+C_5^2C_6^3)P_5^5=281\times120$

(A) 281　　(B) 200　　(C) 81　　(D) 275

例 3.（2009）

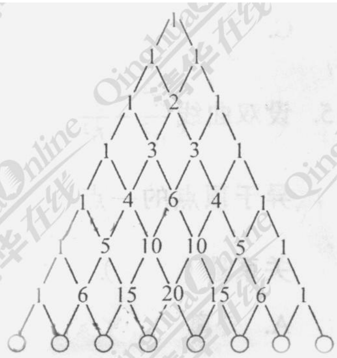
图 4 是我国古代的“杨辉三角形”，按其数字构成规律，图中第八行所有○中应填数字的和等于（　　）.

A. 96

B. 128

C. 256

D. 312



【分析】本题是初等代数题，考查了二项式展开系数的性质（二

项式定理）.

由图可知，第八行的数字之和应是$(a+b)^7=\sum_{k=0}^{7}C_7^k a^k b^{n-k}$的展开系数之和，即$\sum_{k=0}^{7}C_7^k=2^7=128$．正确选项为 B.

注：本题也可以看作是算术题，根据图中规律，得到第八行中的数字是$1,7,21,35,35,21,7,1$，它们的和是128.

七、古典概率问题

［内容综述］

1．基本概念：<u>必然事件、不可能事件、和事件、积事件、互不相容事件、对立事件</u>

2．概率的概念与性质

（1）定义（非负性、规范性、可加性）；

（2）性质：$0\le P(A)\le 1$，$P(\Phi)=0$，

$$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B)$$

3．几种特殊事件发生的概率

（1）等可能事件（古典概型）$P(A)=\dfrac{m}{n}$

（2）互不相容事件 $P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)$；

对立事件 $P(A)+P(B)=1$

（3）相互独立事件 $P(A\bigcap B)=P(A)P(B)$

（4）独立重复试验

如果在一次试验中某事件发生的概率为p，那么在n此独立

重复试验中这个事件恰好发生 k 次的概率为 $P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$.

【典型例题】

1．在100件产品中，只有5件次品．从中任取两件，

（1）两件都是合格品的概率是多少？$\dfrac{C_{95}^2}{C_{100}^2}$

（2）两件都是次品的概率是多少？$\dfrac{C_5^2}{C_{100}^2}$

（3）一件是合格品，一件是次品的概率是多少？$\dfrac{C_5^1C_{95}^1}{C_{100}^2}$

2．甲、乙两人各投篮一次，如果两人投中的概率分别是0.6和0.5．

（1）两人都投中的概率是多少？0.6×0.5

（2）恰有一人投中的概率是多少？$0.6\times 0.5+0.4\times 0.5$

（3）至少有一人投中的概率是多少？$1-0.4\times 0.5$

3．将10个球等可能地放到15个盒子中去，求下列事件的概率：

（1）某指定的10个盒子中各有1个球；$\dfrac{10!}{15^{10}}$

（2）正好有10个盒子中各有1个球. $\dfrac{C_{15}^{10}\times 10!}{15^{10}}$

【真题与样题】

[例题]

例 1.（2003）一批产品的次品率为0.1，每件检测后放回，在连

续三件检测中至少有一件是次品的概率为（　　）.

A．0.271　　B．0.729　　C．0.001　　D．0.081

答：A.

分析：根据题意可知该批产品的合格品率为0.9，连续连续三件检测中都是合格品的概率为$0.9^3 = 0.729$，所以连续三件检测中至少有一件是次品的概率为$1-0.9^3 = 0.271$.

例 2.（2005）任取一个正整数，其平方数的末位数字是4的概率等于（　　）.

A．0.1　　B．0.2　　C．0.3　　D．0.4

分析：当所取正整数的个位数是2或8时，其平方数的末位数字就是4，所有正整数的个位数只有$1,2,3,4,5,6,7,8,9,0$等十种可能，所以要求的概率是$\dfrac{2}{10} = 0.2$，即正确选项为 B.

例 3.（2004）将5个相同的球放入位于一排的8个格子中，每格至多放一个球，则3个空格相连的概率是（　　）.

A．$\dfrac{3}{56}$　　B．$\dfrac{5}{56}$　　C．$\dfrac{3}{28}$　　D．$\dfrac{5}{28}$

答：C.

分析：由于球与格子没有强调不同，每调出5个格子就会得到一种放球的方式，所以将5个相同的球放入位于一排的8个格子中，共有C_8^5种放法，3个空格相连的放法有C_6^1种，因此所求的概率

为$\dfrac{C_6^1}{C_8^5}=\dfrac{3}{28}$．故正确选项为C．

例4．（2008）将8名乒乓球选手分为两组，每组4人，则甲、乙两位选手不在同一组的概率为（ ）．

A．$\dfrac{1}{7}$　　B．$\dfrac{2}{7}$　　C．$\dfrac{3}{7}$　　D．$\dfrac{4}{7}$

答：D．

分析：8名选手分成两组，每组4人，共有$\dfrac{C_8^4}{A_2^2}$种不同分法；甲、乙两人不在同一组的不同分法共有C_6^3，所以甲、乙两人不在同一组的概率为$\dfrac{C_6^3}{\dfrac{C_8^4}{A_2^2}}=2\times\dfrac{6\times5\times4}{3\times2}\dfrac{4\times3\times2}{8\times7\times6\times5}=\dfrac{4}{7}$．

例5．（2011）有长1 cm，2 cm，3 cm，4 cm，5 cm，6 cm的六根细木条，任取其中3根为边能构成一个三角形的概率为（ ）．

A．$\dfrac{1}{5}$　　B．$\dfrac{1}{4}$　　C．$\dfrac{3}{10}$　　D．$\dfrac{7}{20}$

答：D．

分析：本题主要考查了等可能概率的计算、组合数公式、三角形边长之间的关系．

从给定的六根木条中任取三根，不同的取法有

$$C_6^3=\frac{6\times5\times4}{3\times2}=20.$$

根据三角形边长之间的关系可知，能构成三角形的情况共有七种，分别是：

$2,3,4$，$2,4,5$，$2,5,6$，$3,4,5$，$3,4,6,$，$3,5,6$，$4,5,6$，

所以要求的概率为$\frac{7}{20}$.

例 6.（样题）现有三张密封的奖券，其中一张有奖，共有三个人按顺序且每人只能抓走一张，问谁抓到奖的概率最大？[D]

(A)第一个人　(B)第二个人　(C)第三个人　(D)一样大

分析：第一个人抓到奖的概率为$\frac{1\times2\times1}{3\times2\times1}$；第二个人抓到奖的概率为$\frac{2\times1\times1}{3\times2\times1}$；

[练习题]

1.（2007）有两个独立的报警装置．在紧急情况发生时各报警装置发出信号的概率分别是0.95和0.92．则紧急情况发生时至少有一个报警器发出信号的概率是（ D ）.

A．0.920　B．0.935　C．0.950　D．0.996

分析：在紧急情况发生时，各报警装置发出信号的概率分别是0.95和0.92．由于两个报警装置是独立的，所以，在紧急情况发生时，每个报警装置不发出信号的概率分别是0.05与0.08，因此，两个报警器同时不发出信号的概率是$0.05\times0.08=0.004$.

所以，紧急情况发生时至少有一个报警器发出信号的概率是

$1-0.004=0.996$.