# 第四部分 一元函数微积分

## 【考试情况总结】 一元微积分共 52 题

- 一、函数（3 道）
- 1. 定义域（1 道） 2. 函数求值（2 道）
- 二、极限（5 道）
- 三、连续（1 道）
- 四、导数与微分（10 道）
- 1．导数与微分的概念（6 道） 2．导数与微分的运算（4 道）
- 五、导数的应用（14 道）
- 1．中值定理（2 道）
- 2．单调性与凹凸性、极值点与拐点（4 道）
- 3．不等式问题（1 道） 4．最值问题（3 道）
- 5．方程根的问题（3 道） 6．渐近线问题（1 道）
- 六、不定积分（1 道）
- 七、定积分（18 道）
- 1．概念与性质（几何意义）（6 道） 2．定积分运算（9 道）

  3．定积分应用（3 道）

## 第 1 章 函数 极限 连续

### [内容综述]

1．函数

函数概念、函数的性质（奇偶性、单调性、周期性、有界性）、分

段函数、隐函数、反函数、复合函数、基本初等函数（常函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数）、初等函数.

2．极限

极限的概念、极限的性质（极限的唯一性、函数的局部有界性、极限的保序性）、极限的四则运算与复合函数的极限、两个重要极限（$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{x}=e$）、无穷小量的概念与性质（与有界变量的乘积仍是无穷小量、无穷大量与无穷小量的关系等）、无穷小量的比较（高阶无穷小、同阶无穷小、等价无穷小）与等价无穷小代换.

3．连续

连续概念、左右连续与连续的关系、间断点及其分类(第一类：左、右极限都存在的间断点，包括可去型与跳跃型两种；第二类：左、右极限中至少有一个不存在的间断点)、连续函数的四则运算、反函数的连续性与复合函数的连续性、初等函数的连续性（初等函数在其定义域区间上连续）、闭区间上连续函数的性质（有界性；最大、最小值定理；零点存在定理；介值定理）.

**[常见问题]**

1．函数

问题 1：求函数定义域的问题；

问题 2：讨论函数简单性质的问题（单调性、奇偶性、周期性）；

问题 3：求函数值或求函数表达式的问题.

2．极限

问题 1：讨论极限存在性的问题；

问题 2：利用极限性质（保序性）处理的问题；

问题 3：利用重要极限求极限的问题；

问题 4：利用无穷小的比较（等价无穷小）处理的问题.

3．连续

问题 1：讨论函数在一点连续性的问题；

问题 2：找出函数间断点并对其分类的问题；

问题 3：利用连续函数性质（最值存在性、介值存在定理、零点存在定理）处理的问题.

[典型例题]

## 一、极限问题

例 1．（2007）$\lim\limits_{x\to1}f(x)=4$，则必定（　C　）

A．$f(1)=4$　　B．$f(x)$在$x=1$处无定义

C．在$x=1$某邻域$(x\neq1)$，$f(x)>2$　　D．在$x=1$某邻域$(x\neq1)$，$f(x)\neq4$

分析：考查极限概念及其基本性质．根据极限定义，$\lim\limits_{x\to1}f(x)=4$存在不要求函数$f(x)$在点$x_0=1$有定义，因此 A，B 都不一定成立；根据极限定义可知，若有$\lim\limits_{x\to1}f(x)=4$，则对任意的正数$\varepsilon$，在$x=1$某邻域$(x\neq1)$内，恒有$4-\varepsilon<f(x)<4+\varepsilon$，今取$\varepsilon=2$即可，因此 C 成立，由此亦可知 D 不成立.

例 2．（2009．17）$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\pi(x-1)}{\sin\pi x}=$（　　）.

A．$-\pi$　　B．$-1$　　C．$0$　　D．$1$

【分析】本题是微积分中极限部分的极限运算问题，既可以利用罗比

达法则求值，也可以利用重要极限求值.

$$\lim_{x\to1}\frac{\pi(x-1)}{\sin\pi x}=\lim_{x\to1}\frac{\pi}{\pi\cos\pi x}=\frac{1}{\cos\pi}=-1;$$

或 $$\lim_{x\to1}\frac{\pi(x-1)}{\sin\pi x}=\lim_{t\to0}\frac{\pi t}{\sin\pi(t+1)}=-\lim_{t\to0}\frac{\pi t}{\sin\pi t}=-1.$$

正确选项为 B.

例 3．设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-b}\right)^x=2$，则$a,b$满足（　　）.

A．$a+b=2$　　　　B．$2a=b$

C．$\mathrm{e}^a\cdot\mathrm{e}^{-b}=2$　　　　D．$\mathrm{e}^a\cdot\mathrm{e}^b=2$

答：D.

分析：本题主要考查了重要极限与常用的简单代数变形方法.

根据题意，

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-b}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{a+b}{x-b}\right)^{\frac{x-b}{a+b}}\right]^{\frac{a+b}{x-b}x}=\mathrm{e}^{a+b}=2,$$

即 $e^a\cdot e^b=2$. 故正确选项为 D.

例 4.已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{2}{x^2-1}, & 0<x<1,\\ \dfrac{\ln x}{x-1}+a, & x>1,\end{cases}$ 若极限$\lim\limits_{x\to1}f(x)$存在，则$a$等于（　　）.

A． $-\dfrac{3}{2}$　　B． $-\dfrac{1}{2}$　　C． $\dfrac{1}{2}$　　D． $\dfrac{3}{2}$

答：A.

分析：本题主要考查了极限与左、右极限的关系和极限的简单运算.

由于

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{2}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to 1^-}\frac{1-x}{x^2-1}=\lim_{x\to 1^-}=\frac{-1}{x+1}=-\frac{1}{2}$$

，

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left[\frac{\ln[1+(x-1)]}{x-1}+a\right]=1+a,$$

所以$-\dfrac{1}{2}=1+a$，故$a=-\dfrac{3}{2}$．即正确选项为 A.

例 5．当$x\to 0$时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$是比$x\sin(x^n)$高阶的无穷小，而$x\sin(x^n)$是比$e^{x\tan x}-1$高阶的无穷小，则正整数$n$为（　　）.

A． $1$　　B． $2$　　C． $3$　　D． $4$

答：B.

分析：本题主要考查了无穷小比较的概念与常用的等价无穷小.

当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 等价于 $\dfrac{1}{2}x^2\cdot x^2=\dfrac{1}{2}x^4$，$x\sin(x^n)$等价于$x^{n+1}$，$e^{x\tan x}-1$等价于$x\tan x$，从而等价于$x^2$.

根据题意可知$2<n+1<4$，即$1<n<3$，故$n=2$．所以正确选项为 B.

## 二、连续问题

例 6． $x=0$ 是 $f(x)=\arctan\dfrac{1}{x}$ 的（　　）.

A．连续点　　　　　　B．跳跃型间断点

C．可去型间断点　　　D．第二类间断点

答：B.

分析：不题主要考查了函数间断点的概念及其分类.

由于 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\arctan\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{t\to -\infty}\arctan t=-\dfrac{\pi}{2}$,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\arctan\frac{1}{x}=\lim_{t\to +\infty}\arctan t=\frac{\pi}{2},$$

所以 $x=0$ 是 $f(x)=\arctan\dfrac{1}{x}$ 的跳跃型间断点．故正确选项为 B.

例 7． 已知函数 $f(x)=\dfrac{x}{a+\mathrm{e}^{bx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$，那么 $a,b$ 满足（　　）.

A． $a\geqslant 0,b<0$　　　　B． $a>0,b>0$

C． $a<0,b<0$　　　　D． $a\leqslant 0,b>0$

答：A.

分析：本题主要考查了函数连续的概念和初等函数的连续性结论.

由于 $f(x)=\dfrac{x}{a+\mathrm{e}^{bx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，所以其分母 $a+\mathrm{e}^{bx}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上没有等于零的点，又因为 $0<\mathrm{e}^{bx}<+\infty$，所以 $a\geqslant 0$. 由 $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$ 可知 $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(a+\mathrm{e}^{bx}\right)=\infty$，即 $\lim\limits_{x\to -\infty} bx=+\infty$，故 $b<0$.

综上可知正确选项为 A.

注：本题利用特殊值带入法和排除法的思想处理会更简单．例如，取$b=1$，则$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}=\dfrac{x}{a+\mathrm{e}^{x}}=\infty$，与条件$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$矛盾，故排除了选项 B，D.

若取$a=-1$，则$f(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^{bx}-1}$在$x=0$处没定义，与条件函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续矛盾，故选项 C 也被排除.

## 第 2 章 导数与微分的概念及运算

［内容综述］

1．导数概念

（1）定义：导数$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，

右导数$f'_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，左导数$f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；左、右导数与导数的关系；函数在一点可导，则在此点连续.

（2）几何意义：曲线$y=f(x)$在点$(x_0 f(x_0))$处的切线方程与法线方程分别为$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$和$y=f(x_0)-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$.

2．微分概念：若$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=a(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$，则$df(x_0)=a(x_0)\Delta x$.

可微与可导的关系：函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处可微的充分必要条件是 $f(x)$ 在 $x_0$ 处可导，且 $df(x_0)=f'(x_0)dx$.

3．导数运算

基本导数公式，导数的四则运算，复合函数的链导法；隐函数的求导法，反函数的求导法，幂指函数的求导法.

4．高阶导数

[常见问题]

问题 1：利用定义判断函数在一点的可导性与可微性及求导数值或微分值的问题；

问题 2：利用导数定义求极限的问题；

问题 3：利用几何意义求导数值或求切线方程和法线方程的问题；

问题 4：利用四则运算法则或复合函数的链导法则求导数的问题；

问题 5：复合函数和隐函数求二阶导数的问题；

问题 6：简单函数（$a^x,(1+x)^\alpha,\ln(1+x),\sin x,\cos x$）求高阶导数的问题.

**[典型例题]**

**一、导数与微分的概念、性质、几何意义**

例 1．设 $f(x)=\begin{cases} x^\alpha\cos\dfrac{1}{x}, & x>0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续但不可导，则 $\alpha$ 的取值范围是（　　）.

A．$\alpha<0$　　B．$0<\alpha\le 1$　　C．$\alpha>1$　　D．A,B,C 均不正确

答：B.

分析：本题主要考查了函数在一点连续、可导的概念.

函数$f(x)$在$x=0$处连续，说明$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}x^\alpha\cos\frac{1}{x}=0$，故必有$\lim\limits_{x\to0^+}x^\alpha=0$，所以$\alpha>0$.

函数$f(x)$在$x=0$处不可导，说明$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x}$不存在，故$\alpha-1\le0$，即$\alpha\le1$.

综上可知$0<\alpha\le1$，即正确选项为 B.

例 2.（2005）设$f(x)$在点$x=0$处可导，且$f(\frac{1}{n})=\frac{2}{n}(n=1,2,3,\cdots)$，则$f'(0)=$（　　）.

A．$0$　　　B．$1$　　　C．$2$　　　D．$3$

答：C.

分析：本题主要考查了导数的概念和可导与连续的关系.

因为函数$f(x)$在点$x=0$处可导，所以其在点$x=0$处连续，从而

$$f(0)=\lim_{n\to\infty}f(\frac{1}{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0，\ f'(0)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(\frac{1}{n})-f(0)}{\frac{1}{n}}=2.$$

即正确选项为 C.

注：作为选择题，本题的简单方法是取$f(x)=2x$，则$f(x)$满足题中条件，且$f'(x)=2$，特别地有$f'(0)=2$. 各位看出特殊值带入法的威力了吧！

例 3.（2006）设 $f(x)>0$，且导数存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\dfrac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}$ =（ ）.

A．$0$ B． $\infty$ C． $\ln f'(a)$ D． $\dfrac{f'(a)}{f(a)}$

答：D.

分析：本题主要考查了导数定义和复合函数的链导法则.

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\dfrac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln f(a+\frac{1}{n})-\ln f(a)}{\frac{1}{n}}$

$$=\left[\ln f(x)\right]'\Big|_{x=a}=\frac{f'(a)}{f(a)}.$$

注：由于本题中的 $f(x)$ 是满足一定性质的一类函数，所以利用特殊值带入法应该有效．考虑到指数函数与对数函数互为反函数，取 $f(x)=\mathrm{e}^x$，则

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}=\lim_{n\to\infty} n\ln\frac{\mathrm{e}^{a+\frac{1}{n}}}{\mathrm{e}^a}=\lim_{n\to\infty} n\ln\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty} n\times\frac{1}{n}=1,$$

这样就排除了选项 A，B，C．故正确选项为 D.

例 4.（2011．18）若 $f(x)$ 在 $x_0$ 处可导，且 $f(x_0)=a$，$f'(x_0)=b$，而 $|f(x)|$ 在 $x_0$ 处不可导，则（ ）.

A． $a=0$，$b=0$ B． $a=0$，$b\neq 0$

C． $a\neq 0$，$b=0$ D． $a\neq 0$，$b\neq 0$

答：B.

分析：本题主要考查了导数的概念和连续函数的保号性.

若$f(x_0)=a\neq 0$，不妨设$f(x_0)>0$，因为函数$f(x)$在$x_0$处连续，所以在$x_0$附近都有$f(x)>0$，从而$\left|f(x)\right|=f(x)$. 这与$\left|f(x)\right|$在$x_0$处不可导矛盾．所以$f(x_0)=a=0$.

由于$b=f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{x-x_0}$，若$b=0$，

则$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\left|f(x)\right|}{x-x_0}=0$，这与$\left|f(x)\right|$在$x_0$处不可导矛盾．故$b\neq 0$.

**注：特殊值代入法**．例如取$f(x)=x$，则$f(x)$在$x_0=0$处可导，但$|f(x)|$在$x_0=0$处不可导．这时$f(0)=0$，$f'(0)=1\neq 0$.

例 5.（2010．18） 设函数$g(x)$导数连续，其图像在原点与曲线$y=\ln(1+2x)$相切．若函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$在原点可导，则$a=$（ ）.

A．$-2$　　　　B．$0$　　　　C．$1$　　　　D．$2$

答：D.

分析：因为$g(0)=\ln(1+0)=0$，$g'(0)=\dfrac{2}{1+0}=2$，

所以 $a=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=g'(0)=2$.

注：取$g(x)=\ln(1+2x)$，则$a=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}=2$.

例 6.（2003）如果 $f(x)$ 在 $x_0$ 处可导，$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$，则极限

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0) - \mathrm{d}f(x_0)}{\Delta x}$（　　）.

A．等于 $f'(x_0)$　　B．等于1　　C．等于0　　D．不存在

答：C.

分析：本题考查了微分的函数可微的概念和微分的定义及可导与可微的关系.

因为 $f(x)$ 在 $x_0$ 处可导，所以可微，即

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = df(x_0) + o(\Delta x),$$

所以 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0) - \mathrm{d}f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x} = 0$. 故正确选项为 C.

注：如果当年的考生掌握了特殊值带入法，本题就变得十分简单了. 取 $f(x) = x$，则 $\Delta f(x_0) = \Delta x$，$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x = \Delta x$，所以

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0) - \mathrm{d}f(x_0)}{\Delta x} = 0$.

例 7．若 $f(x)$ 为可导的偶函数，则曲线 $y = f(x)$ 在其上任意一点 $(x, y)$ 和点 $(-x, y)$ 处的切线斜率（　　）.

A．彼此相等　　B．互为相反数　　C．互为倒数　　D．A,B,C 均不对

答：B.

分析：本题主要考查了导函数的奇偶性与原来函数奇偶性的关系及导数的几何意义.

因为若 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f'(x)$ 是奇函数，从而

$f'(-x)=-f'(x)$，即曲线 $y=f(x)$ 在其上任意一点 $(x,y)$ 和点 $(-x,y)$ 处的切线斜率绝对值相等、符号相反．故正确选项为 B.

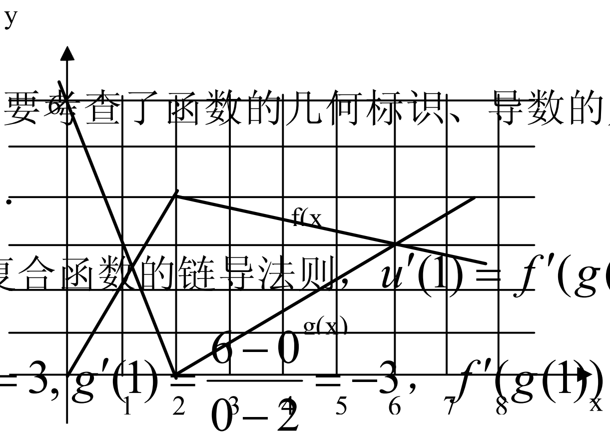
注：取 $f(x)=x^2$，则 $f(x)$ 为可导的偶函数，且 $f'(x)=2x$，所以 $f'(x)=2x$，$f'(-x)=-2x$．故正确选项为 B.

## 二、导数运算

例 8．(2004) 如图，$f(x),g(x)$ 是两个逐段线性的连续函数，设 $u(x)=f(g(x))$，则 $u'(1)$ 的值为（　　）.

A．$\frac{3}{4}$　　B．$-\frac{3}{4}$　　C．$-\frac{1}{12}$　　D．$\frac{1}{12}$

答：A.




分析：主要考查了函数的几何标识、导数的几何意义、及符合函数的链导法则.

根据复合函数的链导法则，$u'(1)=f'(g(1))g'(1)$．由图可以看出

$$g(1)=3, g'(1)=\frac{6-0}{0-2}=-3，f'(g(1))=f'(3)=\frac{3-4}{6-2}=-\frac{1}{4},$$

所以 $u'(1)=f'(g(1))g'(1)=\frac{3}{4}$．故正确选项为 A.

例 9.（2010．17） 设 $f(x)=x^2$，$h(x)=f(1+g(x))$，其中 $g(x)$ 可导，$g'(1)=h'(1)=2$，则 $g(1)=$（　　）.

A．$-2$　　B．$-\frac{1}{2}$　　C．$0$　　D．$2$

答：B.

分析：因为 $f(x)=x^2$，所以 $h(x)=f(1+g(x))=[1+g(x)]^2$，求导得

$$h'(x)=2[1+g(x)]g'(x).$$

由于 $g'(1)=h'(1)=2$，所以 $g(1)=-\dfrac{1}{2}$.

例 10．设函数 $y=f(\dfrac{x+1}{x-1})$ 满足 $f'(x)=\arctan\sqrt{x}$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=2}$ 等于（　　）.

A．$\arctan\sqrt{2}$　　B．$-\dfrac{2\pi}{3}$　　C．$\dfrac{2\pi}{3}$　　D．$\dfrac{\pi}{3}$

答：B.

分析：本题主要考查了复合函数的链导法则及特殊角的三角函数值.

因为 $f'(x)=\arctan\sqrt{x}$，所以

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=2}=f'(\frac{x+1}{x-1})\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'\Big|_{x=2}=f'(3)\frac{-2}{(x-1)^2}\Big|_{x=2}$$

$$=-2\arctan\sqrt{3}=-\frac{2\pi}{3}$$

即正确选项为 B.

例 11．曲线 $\sin xy+\ln(y-x)=x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为（　　）.

A．$y=x+1$　　B．$y=-x+1$

C．$y=x-1$　　D．$y=-x-1$

答：A.

分析：本题考查了隐函数的求导法、导数的几何意义及直线方程，是一道简单综合题.

在方程 $\sin xy+\ln(y-x)=x$ 两端关于 $x$ 求导，将 $y$ 看成 $x$ 的函数，得

$$(y+xy')\cos xy+\frac{y'-1}{y-x}=1.$$

将$x=0, y=1$代入，得 $y'(0)=1$，故所求的切线是过点$(0,1)$、斜率为$1$的直线，方程为 $y-1=x$，即$y=x+1$．故正确选项为 A.

例 12．设 $y=e^{u(x)}$ ，$u(x)$具有二阶导数，则$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$（　　）.

A．$\mathrm{e}^{u(x)}$　　　　B．$\mathrm{e}^{u(x)}u''(x)$

C．$\mathrm{e}^{u(x)}[u'(x)+u''(x)]$　　　　D．$\mathrm{e}^{u(x)}[(u'(x))^2+u''(x)]$

答：D.

分析：本题主要考查了简单复合函数二阶导数的求法．根据复合函数的链导法则得

$\frac{dy}{dx}=e^{u(x)}u'(x)$，$\frac{d^2y}{dx^2}=e^{u(x)}\left[u'(x)\right]^2+e^{u(x)}u''(x)$．故正确选项为 D.

## 第 3 章 导数应用

**[内容综述]**

1．极值与极值点的概念；费马定理：可导极值点导数为零.

2．罗尔定理：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内可导，且 $f(a)=f(b)$，则存在$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=0$．也就是说，当曲线的两个端点在一条水平线上时，曲线至少有一条水平的切线.

3．拉格朗日中值定理：若$f(x)$在$[a,b]$上连续，在$(a,b)$内可导，则存在$\xi\in(a,b)$，使得$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

4．洛必达法则：当函数 $f(x), g(x)$ 在同一个极限过程中同是无穷小量或同是无穷大量时，一般地有 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

5．单调性与一阶导数的关系：若 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上大于零，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单增；若 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上小于零，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单减.

6．凹凸性与二阶导数的关系：若 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上大于零，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上下凸；若 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上小于零，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上上凸.

7．渐近线的求法：若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$，则直线 $y=A$ 是曲线 $y=f(x)$ 在 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 时的水平渐近线；若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$，则直线 $x=x_0$ 是曲线 $y=f(x)$ 的铅直渐近线.

**[常见问题]**

问题 1：直接利用费马定理、罗尔定理或拉格朗日中值定理处理的问题；

问题 2：判断函数单调性和求函数极值的问题；

问题 3：证明函数不等式的问题；

问题 4：讨论方程实根个数的问题；

问题 5：求函数最大、最小值的问题；

问题 6：判断函数的凹凸性和求拐点的问题；

问题 7：利用洛必达法则求不定式极限的问题；

问题 8：求曲线的水平或铅直渐近线的问题.

**[典型例题]**

## 一、中值定理

例 1.（2005）若 $f(x)$ 的二阶导数连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x)=1$，则对任意常数 $a$ 必有

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f'(x+a)-f'(x)]=$（　　）.

A．$a$　　　　B．$1$　　　　C．$0$　　　　D．$af''(a)$

答：A.

分析：本题主要考查了微分中值定理．根据微分中值定理可知，存在介于 $x$ 和 $x+a$ 之间的 $\xi$ 使得

$$f'(x+a)-f'(x)=f''(\xi)a.$$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x)=1$，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f'(x+a)-f'(x)]=\lim\limits_{x\to+\infty} f''(\xi)a=a$.

故正确选项为 A.

注：本题也可利用特殊值带入法求解．取 $f''(x)=1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x)=1$．又 $f'(x)=x+\sqrt{x}$，所以

$$\lim_{x\to+\infty}[f'(x+a)-f'(x)]=\lim_{x\to+\infty}\left[x+a+\sqrt{x+a}-x-\sqrt{x}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[a+\frac{a}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}\right]=a.$$

## 二、极值与最值、极值点与拐点、单调性与凸性

例 2.（2003）设 $f(x)=\int_0^x t^2(t-1)\mathrm{d}t$，则 $f(x)$ 的极值点的个数是（　　）.

A．$0$　　　B．$1$　　　C．$2$　　　D．$3$

答：B.

分析：主要考查了变限定积分函数的导数公式和判断函数极值的一般方法.

因为$f'(x)=x^2(x-1)$，所以$f'(x)=x^2(x-1)=0$的点只有两个$x=0, x=1$，由于$f'(x)=x^2(x-1)$在$x=0$两侧同号，在$x=1$两侧异号，所以$x=0$不是极值点，$x=1$是极值点．故正确选项为 B.

例 3．（2010．19）　若 $a,b,c,d$ 成等比数列，则函数 $y=\frac{1}{3}ax^3+bx^2+cx+d$（　　）.

A．有极大值，而无极小值　　　B．无极大值，而有极小值

C．有极大值，也有极小值　　　D．无极大值，也无极小值

答：D.

分析：取$a=b=c=d=1$，则

$$y=\frac{1}{3}ax^3+bx^2+cx+d=\frac{1}{3}x^3+x^2+x+1,$$

$y'=x^2+2x+1=(x+1)^2\geq 0$，即函数$y=\frac{1}{3}x^3+x^2+x+1$单调递增.

例 4．设函数 $y=f(x)$ 满足方程 $y''-2y'+4y=0$，且$f(x_0)>0, f'(x_0)=0$，则$f(x)$（　　）.

A．在点$x_0$处取得极大值　　　B．在点$x_0$处取得极小值

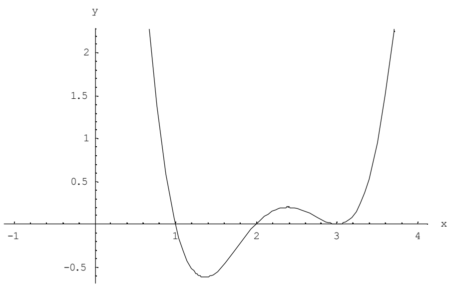
C．在点$x_0$的某邻域内单调增加　　　D．在点$x_0$的某邻域内单调减少

答：A.

分析：本题考查了驻点是极值点的充分条件.

根据题意，在点$x_0$处有$f'(x_0)=0$，$f''(x_0)=-4f(x_0)<0$，所以点$x_0$是函数的极大值点. 故正确选项为 A.

例 5. 下图是函数$f(x)$的导函数$y=f'(x)$的图像，那么函数$f(x)$有（　　）.




A. 两个极值点、三个拐点　　B. 两个极值点、两个拐点

C. 三个极值点、三个拐点　　D. 三个极值点、两个拐点

答：A.

分析：本题考查了判断函数极值点和拐点的充分条件.

注意到只有当一点两侧的一阶导数异号时，此点才是函数的极值点；只有当一点两侧的一阶导数的单调性不同时，此点才是函数的拐点. 由此从图上可以看出：$x=1, x=2$分别是函数的极大值点和极小值点，函数的三个拐点一个是$x=3$，另外两个分别介于$1$，$2$之间和$2,3$之间.

综上可知正确选项为 A.

例 6.（2006）设正圆锥母线长为$5$，高为$h$，底面圆半径为$r$，在正圆锥的体积最大时，$\dfrac{r}{h}=$（　　）.

A. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$　　B. $1$　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{3}$

答：C.

分析：本题将一元函数微分学与空间几何体结合在一起，主要考查了勾股定理、圆锥体积公式和闭区间上函数最值的求法.

根据题意，圆锥体积为

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi h(5^2-h^2).$$

由 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}h}=\frac{1}{3}\pi(5^2-3h^2)=0$ 得 $h^2=\frac{25}{3}$（易知这时体积最大），从而 $r^2=5^2-h^2=\frac{50}{3}$，故 $\frac{r}{h}=\sqrt{2}$. 即正确选项为 C.

例 7. 已知点 $(1,3)$ 是曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点，则（　　）.

A. $a=-\frac{3}{2},b=\frac{9}{2}$　　B. $a=\frac{3}{2},b=\frac{9}{2}$

C. $a=\frac{3}{2},b=-\frac{9}{2}$　　D. $a=-\frac{3}{2},b=-\frac{9}{2}$

答：A.

分析：本题主要考查了拐点的必要条件和充分条件.

由点 $(1,3)$ 在曲线上和拐点处的二阶导数为零，得

$$\begin{cases}a+b=3,\\6a+2b=0.\end{cases}$$

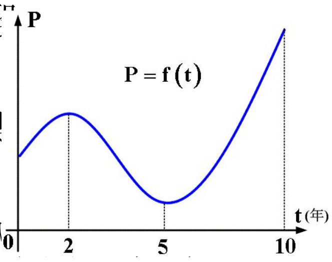
解得 $a=-\frac{3}{2},b=\frac{9}{2}$.

由于 $y''=9(1-x)$，所以当 $x\in(-\infty,1)$ 时，$y''>0$，$x\in(1,+\infty)$ 时，

$y'' < 0$，故点$(1, 3)$却实是$y = ax^3 + bx^2$的拐点．

综上可知正确选项为 A．

注：作为选择题可不考虑解答中的最后一




例8．（2006）如右图曲线$P = f(t)$表示某

来的产值变化情况．设$f(t)$是可导函数, 从

可以判断, 该厂产值的增长速度(　　)．

A．前两年越来越快，后五年越来越慢

B．前两年越来越慢，后五年越来越快

C．前两年越来越快，以后越来越慢

D．前两年越来越慢，以后越来越快

答：B．

分析：(本题是一元微分学题．考查了函数凹凸性欲一阶导数单调性的关系)

由图可知，前两年$P = f(t)$的图像上凸，二阶导小于零，一阶导单减；后五年$P = f(t)$的图像下凸，二阶导大于零，一阶导单增．

## 三、罗比达法则

例 9．设当$x \to 0$时，$e^x - (ax^2 + bx + 1)$是比$x^2$高阶的无穷小量，则（　　)．

A．$a = \frac{1}{2},\ b = 1$　　B．$a = 1,\ b = 1$

C．$a = -\frac{1}{2},\ b = 1$　　D．$a = -1,\ b = 1$

答：A.

分析：本题主要考查了无穷小比较的概念和罗必达法则.

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-(ax^2+bx+1)}{x^2}=0$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}[\mathrm{e}^x-(2ax+b)]=1-b=0$，否则根据洛必达法则有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-(ax^2+bx+1)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-(2ax+b)}{2x}=\infty$，与条件矛盾．类似地可知 $\lim\limits_{x\to 0}[\mathrm{e}^x-2a]=1-2a=0$，否则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-(ax^2+bx+1)}{x^2}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-(2ax+b)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-2a}{2}=\frac{1-2a}{2}\neq 0,$$

与条件矛盾.

综上可知正确选项为 A.

## 四、不等式

例 10.（2004）如下不等式成立的是（　　）.

A. 在 $(-3,0)$ 区间上，$\ln 3-x<\ln(3+x)$

B. 在 $(-3,0)$ 区间上，$\ln 3-x>\ln(3+x)$

C. 在 $(0,+\infty)$ 区间上，$\ln 3-x>\ln(3+x)$

D. 在 $[0,+\infty)$ 区间上，$\ln 3-x<\ln(3+x)$

答：B.

分析：本题主要考查了函数不等式的一般证明方法．

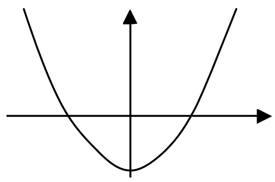
令 $f(x)=\ln(3+x)+x-\ln 3$，则

$f'(x)=\dfrac{1}{3+x}+1=\dfrac{4+x}{3+x}>0\ (x>-3)$，又 $f(0)=0$，所以在 $(-3,0)$ 区间上，有 $f(x)<f(0)=0$，即 $\ln 3-x>\ln(3+x)$．

故正确选项为 B．

**五、方程根**

例 11．（2003）方程 $x^2=x\sin x+\cos x$ 的实根个数是（　　）．



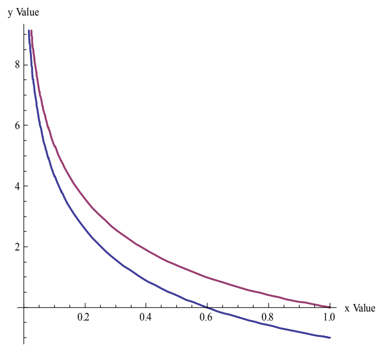
A．$1$　　B．$2$　　C．$3$　　D．$4$

答：B．

分析：本题主要考查了讨论方程实根个数的一般方法．

记 $f(x)=x^2-x\sin x-\cos x$，则 $f'(x)=2x-\sin x-x\cos x+\sin x=x(2-\cos x)$．所以当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，故 $f(0)=-1<0$ 是 $f(x)$ 的最小值．又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$，所以方程 $f(x)=0$ 分别在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上有且仅有一个实根．故正确选项为 B．

例 12．（2011．17）若方程 $x-\mathrm{e}\ln x-k=0$ 在 $(0,1]$ 上有解，则 $k$ 的最小值为（　　）．




A．$-1$　　B．$\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

C．$1$　　D．$\mathrm{e}$

答：C.

分析：本题主要考查了讨论一般方程根的存在性问题.

记 $f(x)=x-\mathrm{e}\ln x-k$，则 $f'(x)=1-\dfrac{\mathrm{e}}{x}<0, x\in(0,1]$.

又 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$，$f(1)=1-k$，所以只要 $f(1)=1-k\le 0$，即 $k\ge 1$，方程就有解.

图中给出了 $k=1$ 与 $k=2$ 时函数 $y=f(x)$ 的图象.

## 六、渐近线

例 13.（2005）函数 $f\left(x\right)=\dfrac{x\left|x\right|}{\left(x-1\right)\left(x-2\right)}$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 上有（　　）.

A．1条垂直渐进线，1条水平渐进线；

B．1条垂直渐进线，2条水平渐进线

C．2条垂直渐进线，1条水平渐进线；

D．2条垂直渐进线，2条水平渐进线

分析：因为

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\infty, \lim_{x\to 2} f(x)=\infty, \lim_{x\to+\infty} f(x)=1, \lim_{x\to-\infty} f(x)=-1,$$

所以曲线 $y=f(x)$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 上有 2 条垂直渐进线，2 条水平渐进线. 即正确选项为 D.

# 第 4 章 不定积分

## [内容综述]

1．原函数的定义：若 $F'(x)=f(x), x\in I$，则 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $I$ 上的原函数；$f(x)$ 在区间 $I$ 上的所有原函数可以表示为 $F(x)+C$，其

中 $C$ 是任一常数.

2．不定积分的定义与性质： $\int f(x)dx = F(x)+C$；

$$\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx,$$

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

3．不定积分的换元积分法

（1）第一换元积分法（凑微分法）；（2）第二换元积分法.

4．不定积分的分部积分法：

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x).$$

注：掌握可以用分部积分法处理的被积函数类型.

[常见问题]

问题 1：利用原函数的概念与不定积分的定义处理的问题；

问题 2：求简单函数原函数的问题；

问题 3：利用凑微分法或分部积分法求不定积分的问题.

[典型例题]

例 1．已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\mathrm{e}^{x^2}$，则 $\int xf'(x)\mathrm{d}x =$（　　）.

A．$(2x^2-1)e^{x^2}+C$　　B．$(2x-1)e^{x^2}+C$

C．$(x^2-1)e^{x^2}+C$　　D．$(2x-1)xe^{x^2}+C$

答：A.

分析：本题主要考查了原函数的概念和不定积分的分部积分法.

因为 $e^{x^2}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，所以 $f(x)=\left(e^{x^2}\right)'=2xe^{x^2}$，从而

$$\int xf'(x)dx = xf(x) - \int f(x)dx = 2x^2e^{x^2} - e^{x^2} + C.$$

故正确选项为 A.

注：此类问题总可以利用选项验证的方法得到正确答案．因为$e^{x^2}$是$f(x)$的一个原函数，所以$f(x)=2xe^{x^2}$，$f'(x)=2(1+2x^2)e^{x^2}$．由于

$$\left[(2x^2-1)e^{x^2}+C\right]' = 4xe^{x^2} + (2x^2-1)2xe^{x^2}$$

$$= 2x(1+2x^2)e^{x^2} = xf'(x),$$

所以选项 A 正确.

例 2. 设$\int f(x)\mathrm{d}x = \arctan x + C$，则$\int \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x =$（　　）.

A. $\frac{1}{\arctan x}+C$　　B. $2x+C$

C. $1+x^2+C$　　D. $x(1+\frac{1}{3}x^2)+C$

答：D.

分析：本题主要考查了不定积分的概念.

因为 $\int f(x)dx = \arctan x + C$，所以 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$，

$$\int \frac{1}{f(x)}dx = \int (1+x^2)dx = x + \frac{1}{3}x^3 + C.$$

例 3. $\int \mathrm{e}^{x^2+\ln x}\mathrm{d}x = (\quad)+C$（$C$为常数）.

A．$\mathrm{e}^{x^2}$　　B．$\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}$　　C．$2\mathrm{e}^{x^2}$　　D．$(1+2x^2)\mathrm{e}^{x^2}$

答：B.

分析：本题考查了简单代数变形方法与不定积分的凑微分法.

因为$\int e^{x^2+\ln x}dx=\int xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int e^{x^2}dx^2=\frac{1}{2}e^{x^2}+C$，所以正确选项为 B.

注：本题利用选项验证法也很简单．由于$\left(\mathrm{e}^{x^2}\right)'=2x\mathrm{e}^{x^2}\neq x\mathrm{e}^{x^2}$，所以排除掉选项 A；由于$\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}\right)'=x\mathrm{e}^{x^2}=\mathrm{e}^{x^2+\ln x}$，所以选项 B 正确.

例 4．$\int\frac{\ln(\ln x)}{x}dx=$（　　）.

A．$\ln(\ln x)+C$　　B．$\ln x\ln(\ln x)-\ln x+C$

C．$\ln x\cdot\ln(\ln x)+C$　　D．$\ln x\ln(\ln x)+\ln x+C$

答：B.

分析：本题主要考查了不定积分的凑微分法和分部积分法.

因为$\int\frac{\ln(\ln x)}{x}dx=\int\ln(\ln x)d(\ln x)=\ln x\ln(\ln x)-\ln x+C$，所以正确选项为 B.

## 第 5 章 定积分

### [内容综述]

1．定积分的概念与性质

（1）定积分的定义：$\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$；平均值

$$\overline{f}=\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}.$$

（2）定积分的几何意义：当 $f(x)\geq 0$ 时，$\int_a^b f(x)dx$ 大小与由 $x=a,x=b,y=0$ 及 $y=f(x)$ 围成的曲边梯形的面积相等.

（3）定积分的性质

A．$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$，$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt$；

B．线性性质：

$$\int_a^b [k_1 f(x)+k_2 g(x)]dx=k_1\int_a^b f(x)dx+k_2\int_a^b g(x)dx;$$

C．区间可加性：$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$；

D．函数奇偶性：$\int_{-a}^a f(x)dx=\begin{cases} 0, & f(x)\text{是奇函�}, \\ 2\int_0^a f(x)dx, & f(x)\text{是偶函�}; \end{cases}$

E．函数周期性：若函数 $f(x)$ 以 $l$ 为周期，则

$$\int_a^{a+l} f(x)dx=\int_0^l f(x)dx;$$

F．比较定理：若 $f(x)\geq g(x),x\in[a,b]$，则

$$\int_a^b f(x)dx\geq\int_a^b g(x)dx;$$

G．积分中值定理：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

2．定积分的运算

（1）变限定积分函数

A．变限定积分函数的定义：$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$；

B．变限定积分函数的导数：当函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续时，

$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 可导，且 $\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)' = f(x)$.

（2）牛顿—莱布尼兹公式：函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$.

（3）定积分的换元积分法和分部积分法.

注：掌握换元积分法和分部积分法的公式，并要了解利用换元积分法和分部积分法处理的一般问题：利用一个积分求另一个积分的问题，比较两个积分是否相等或将积分关系式变形的问题.

3．定积分的几何应用

（1）平面图形的面积问题；

（2）旋转体的体积问题.

**[常见问题]**

问题 1：利用几何意义和性质（面积、函数奇偶性和周期性等）求积分值的问题；

问题 2：利用牛顿—莱布尼兹公式求积分值的问题；

问题 3：利用换元积分法和分部积分法求积分值或证明积分等式的问

题；

问题 4：利用比较定理判断两个积分大小的问题；

问题 5：关于变限定积分函数（求导数、讨论性质等）的问题；

问题 6：求平面图形面积或旋转体体积的问题.

[典型例题]

**一、定积分的概念、性质、几何意义**

例 1.（2011．19）若 $\sqrt{1-x^2}$ 是 $xf(x)$ 的一个原函数，则 $\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=$（　　）.

A. $-1$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $-\frac{\pi}{4}$　　D. $1$

答：C.

分析：本题主要考查了原函数的概念和定积分的几何意义.

因为 $xf(x)=(\sqrt{1-x^2})'=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$，所以

$$\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=-\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{4}.$$

注：定积分 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$ 表示的是圆弧 $y=\sqrt{1-x^2}$ 与直线 $x=0$，$x=1$ 及 $y=0$ 所围区域的面积.

例 2. 计算定积分 $\int_{-2}^{2}(x+2)\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$.

解：$\int_{-2}^{2}(x+2)\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x=\int_{-2}^{2}x\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x+\int_{-2}^{2}2\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$

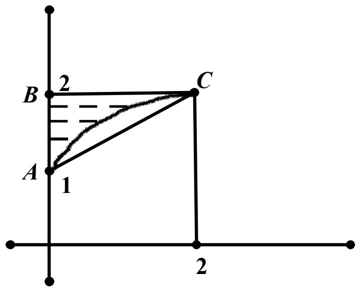
$$=0+4\pi=4\pi.$$

例 3.（2011．21）设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上单调连续， $f(0)=1$，$f(2)=2$，且对任意 $x_1,x_2\in[0,2]$ 总有 $f(\frac{x_1+x_2}{2})>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，$g(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数，$P=\int_1^2 g(x)\mathrm{d}x$，则（　　）.

A． $3<P<4$　　　　B． $2<P<3$

C． $1<P<2$　　　　D． $0<P<1$

答：D．




分析：本题主要考查了凸函数的定义、反函数的概念、定积分的几何意义．

由题意，函数 $y=f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 是上凸函数．根据反函数的概念及定积分的几何意义，$P=\int_1^2 g(x)\mathrm{d}x$ 表示的是图中曲边 $\Delta ABC$ 的面积，其值小于1．

注：特殊值代入法．取 $f(x)=\sqrt{\frac{x}{2}}+1$，则 $g(x)=2(x-1)^2$，所以

$$P=\int_1^2 g(x)\mathrm{d}x=\int_1^2 2(x-1)^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}.$$

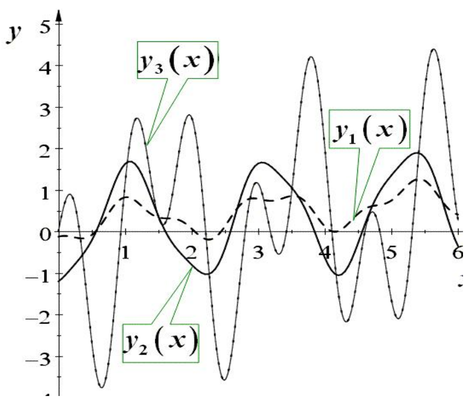
例4．（2007）下图中的三条曲线分别是:

(1) $f\left(x\right)$，(2) $\int_x^{x+1} f\left(t\right)dt$，

(3) $\frac{1}{3}\int_x^{x+3} f\left(t\right)dt$ 的图形，按此顺序，

它们与图中所标示

$y_1(x),y_2(x),y_3(x)$ 的对应关系是



（ D ）

A．$y_1(x)$，$y_2(x)$，$y_3(x)$

B．$y_1(x)$，$y_3(x)$，$y_2(x)$

C．$y_3(x)$，$y_1(x)$，$y_2(x)$

D．$y_3(x)$，$y_2(x)$，$y_1(x)$

$y = y_1(x)$

$y = y_2(x)$

$y = y_3(x)$

分析：考查定积分的概念及性质．因为定积分$\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$表示函数在区间上的平均值，而一个函数通过移动平均之后，其相应曲线的起伏变化会变小，也就是曲线被抹平滑，而且平均的区间越长，抹平滑的效果越好．

而该题中三个函数中的两个用积分表示的函数，正是在二个长度不同区间上的滑动平均值：$\int_x^{x+1} f(t)dt = \dfrac{1}{(x+1)-x}\int_x^{x+1} f(t)dt$，$\dfrac{1}{3}\int_x^{x+3} f(t)dt = \dfrac{1}{(x+3)-x}\int_x^{x+3} f(t)dt$． 因为起伏变化最大的是$y_3(x)$，其次是$y_2(x)$，起伏最小的是$y_1(x)$． 所以解答的次序是$y_3(x)$，$y_2(x)$，$y_1(x)$．

例 5．设$a > 0$，则定积分$I_1 = \int_0^a \dfrac{x}{1+x}\mathrm{d}x$与$I_2 = \int_0^a \ln(1+x)\mathrm{d}x$的大小关系是（ ）．

A．$I_1 < I_2$ B．$I_1 = I_2$ C．$I_1 > I_2$ D．与$a$的取值有关

答：A．

分析：本题主要考查了定积分的比较定理和证明函数不等式的一般方

法.

令$f(x)=\dfrac{x}{1+x}-\ln(1+x)$，则$f'(x)=-\dfrac{x}{(1+x)^2}<0\ \ (x>0)$，

且$f(0)=0$，所以$f(x)=\dfrac{x}{1+x}-\ln(1+x)<f(0)=0\ \ (x>0)$，从而$I_1<I_2$.

故正确选项为 A.

**二、定积分的运算（换元积分法、分部积分法、变限定积分）**

例 6．如果函数$f(x)$在区间$[0,1]$上连续，且$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=a$，则

$\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{x}}f(\sqrt{x})\mathrm{d}x=$（　　）.

A．$\dfrac{1}{2}a$　　　B．$a$　　　C．$2a$　　　B．$a^2$

答：C.

分析：本题考查了定积分的换元积分法.

因为$\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{x}}f(\sqrt{x})dx=2\int_0^1 f(\sqrt{x})d\sqrt{x}\overset{u=\sqrt{x}}{=}2\int_0^1 f(u)du=2a$，

所以正确选项为 C.

注：特殊值代入法.

例 7．(2004)设$f(x)$为连续函数，且$\int_0^{\pi} f(x\sin x)\sin x\mathrm{d}x=1$，则

$\int_0^{\pi} f(x\sin x)x\cos x\mathrm{d}x=$（　　）.

A．$0$　　　B．$1$　　　C．$-1$　　　D．$\pi$

答：C．

分析：主要考查了定积分的换元积分法和定积分的性质．因为

$$\int_0^{\pi} f(x\sin x)\sin x dx + \int_0^{\pi} f(x\sin x)x\cos x dx$$

$$= \int_0^{\pi} f(x\sin x)d(x\sin x) = \int_0^{0} f(u)du = 0,$$

且$\int_0^{\pi} f(x\sin x)\sin x dx = 1$，所以$\int_0^{\pi} f(x\sin x)x\cos x dx = -1$．故正确选项为 C．

注：特殊值代入法．

例 8．(2003) 设$I = \int_0^{\pi} \sin(\cos x)\mathrm{d}x$，则（　　）．

A．$I = 1$　　B．$I < 0$　　C．$0 < I < 1$　　D．$I = 0$

答：D．

分析：主要考查了定积分的换元积分法和定积分的性质．

令 $t = \cos x$，则 $\mathrm{d}x = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$，从而 $I = \int_0^{\pi} \sin(\cos x)\mathrm{d}x = \int_1^{-1}\left(-\frac{\sin t}{\sqrt{1-t^2}}\right)\mathrm{d}t$．由于$\frac{\sin t}{\sqrt{1-t^2}}$是奇函数，所以$\int_{-1}^{1}\frac{\sin t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = 0$．故正确选项为 D．

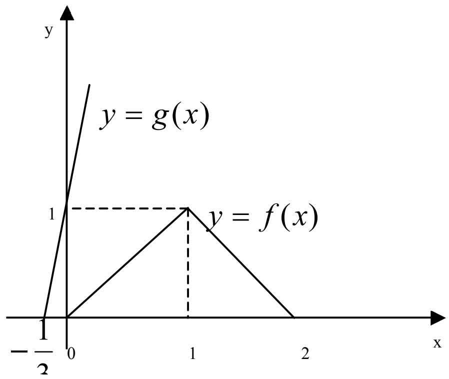
注：本题也可作如下变换，令$t = x - \frac{\pi}{2}$，则

$$I=\int_0^{\pi}\sin(\cos x)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin(\cos(t+\frac{\pi}{2}))dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin(-\sin t)dt$$

$$=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sin t)\mathrm{d}t\,.$$

由于$\sin(\sin t)$是奇函数，所以$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sin t)\mathrm{d}t=0$.

例 9.（2006）如右图所示，函数$f(x)$是以$2$为周期的连续周期函数，它在$[0,2]$上的图形为分段直线，$g(x)$是线性函数，则$\int_0^2 f(g(x))\mathrm{d}x=$（B）.




A．$\dfrac{1}{2}$　　B．$1$　　C．$\dfrac{2}{3}$　　D．$\dfrac{3}{2}$

分析：根据图形可知 $g(x)=1+3x$，$\int_0^2 f(x)dx=1$，且函数$f(x)$在每个长度为 2 的区间上的积分值相等，所以

$$\int_0^2 f(g(x))\mathrm{d}x=\int_1^7 f(u)\frac{1}{3}\mathrm{d}u=\frac{1}{3}\times 3\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\times 3\times 1=1\,.$$

例 10．已知$A=\int_0^1\frac{\mathrm{e}^t}{1+t}\mathrm{d}t$，求$\int_0^1\frac{\mathrm{e}^t}{(1+t)^2}\mathrm{d}t$.

解：因为$A=\int_0^1\frac{\mathrm{e}^t}{1+t}\mathrm{d}t$，所以

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{(1+t)^2}\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{e}^t}{1+t}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{1+t}\mathrm{d}t = 1-\frac{\mathrm{e}}{2}+A.$$

例 11.（2011.20）若函数 $y(x)=\int_2^{x^2}\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\mathrm{d}t$，则 $\left.\frac{\mathrm{d}^2 y(x)}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=-1}$ =（ ）.

A. $0$　　B. $1$　　C. $4\mathrm{e}^{-1}$　　D. 4e

答：A.

分析：本题考查了变限定积分的导数公式.

因为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x\mathrm{e}^{-\sqrt{x^2}}\overset{x<0}{=}2x\mathrm{e}^x$，$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=2\mathrm{e}^x+2x\mathrm{e}^x=2(1+x)\mathrm{e}^x$，

所以 $\left.\frac{\mathrm{d}^2 y(x)}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=-1}=0$.

例 12.（2008.19）当 $x\geq 0$ 时，函数 $f(x)$ 可导，有非负的反函数 $g(x)$，且恒等式 $\int_1^{f(x)}g(t)\mathrm{d}t=x^2-1$ 成立，则函数 $f(x)$=（ ）.

A. $2x+1$　　B. $2x-1$　　C. $x^2+1$　　D. $x^2$

分析：本题是积分学题，考查了变限定积分求导、反函数概念和定积分性质.

由 $\int_1^{f(x)}g(t)dt=x^2-1$，得 $f'(x)g(f(x))=2x$，又 $g(f(x))=x$，所以 $f'(x)=2$，即 $f(x)=2x+C$.

又由 $\int_1^{f(x)}g(t)dt=x^2-1$ 知 $\int_1^{f(1)}g(t)dt=1^2-1=0$，即 $f(1)=1$，所以 $C=-1$，故 $f(x)=2x-1$. 所以正确选项为 B .

“注：本题也可以利用选项验证法求得正确选项.

若$f(x)=2x+1$，则$g(x)=\frac{1}{2}(x-1)$，所以

$$\int_1^{f(x)} g(t)dt=\int_1^{2x+1}\frac{1}{2}(t-1)dt=\frac{1}{4}(t-1)^2\Big|_1^{2x+1}=x^2\neq x^2-1;$$

若$f(x)=2x-1$，则$g(x)=\frac{1}{2}(x+1)$，所以

$$\int_1^{f(x)} g(t)dt=\int_1^{2x-1}\frac{1}{2}(t+1)dt=\frac{1}{4}(t+1)^2\Big|_1^{2x-1}=x^2-1.$$

故正确选项为 B .”

例 13 .（2009 . 21）若连续函数$f(x)$满足$\int_0^x uf(x-u)du=-\sqrt{x}+\ln 2$，则$\int_0^1 f(x)dx=$（ ）.

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $0$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $1$

分析：本题是微积分中定积分部分的问题，考查了定积分的换元积分法与变限定积分函数的求导法.

$$F(x)=\int_0^x uf(x-u)du\overset{x-u=t}{=}\int_x^0(x-t)f(t)(-dt)$$

$$=x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt,$$

$$F'(x)=\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=\int_0^x f(t)dt,$$

所以 $\int_0^x f(t)dt=-\frac{1}{2\sqrt{x}}$. 从而$\int_0^1 f(t)dt=-\frac{1}{2}$.

正确选项为 A.

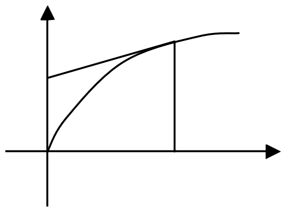
**三、定积分的几何应用**

例 14．(2004)过点$(p,\sin p)$作曲线$y=\sin x$的切线，设该曲线与切

线及$y$轴所围成的面积为$S_1$，曲线与直线$x=p$及$x$轴所围成的面积为$S_2$，则（　　）.

A. $\lim\limits_{p\to 0^+}\dfrac{S_2}{S_1+S_2}=\dfrac{1}{3}$　　B. $\lim\limits_{p\to 0^+}\dfrac{S_2}{S_1+S_2}=\dfrac{1}{2}$

C. $\lim\limits_{p\to 0^+}\dfrac{S_2}{S_1+S_2}=\dfrac{2}{3}$　　D. $\lim\limits_{p\to 0^+}\dfrac{S_2}{S_1+S_2}=1$



答：D.

分析：本题主要考查了切线方程、利用定积分表示图形面积、洛必达法则等.

曲线$y=\sin x$过点$(p,\sin p)$的切线方程为$y=\sin p+(x-p)\cos p$，根据题意可知

$$S_1=\int_0^p[\sin p+(x-p)\cos p-\sin x]dx$$

$$=p\sin p-\frac{1}{2}p^2\cos p+\cos p-1,$$

$$S_2=\int_0^p\sin xdx=1-\cos p,$$

所以$\lim\limits_{p\to 0^+}\dfrac{S_2}{S_1+S_2}=\lim\limits_{p\to 0^+}\dfrac{1-\cos p}{p\sin p-\frac{1}{2}p^2\cos p}$

$$=\lim_{p\to 0^+}\frac{\sin p}{\sin p+\frac{1}{2}p^2\sin p}=1.$$

例 15．设平面区域$D$由$x=1, x=A, y=\dfrac{1}{x}, y=0$围成，$F(A)$表示

区域的面积，$G(A)$表示$D$绕$x$旋转一周所成旋转体的体积，则(　　).

A．$\lim\limits_{A\to+\infty} F(A)=+\infty,\ \lim\limits_{A\to+\infty} G(A)=+\infty$

B．$\lim\limits_{A\to+\infty} F(A)=+\infty,\ \lim\limits_{A\to+\infty} G(A)=1$

C．$\lim\limits_{A\to+\infty} F(A)=+\infty,\ \lim\limits_{A\to+\infty} G(A)=\pi$

D．$\lim\limits_{A\to+\infty} F(A)=+\infty,\ \lim\limits_{A\to+\infty} G(A)=2\pi$

答：C.

分析：本题考查了定积分的几何应用.　　根据题意，

$F(A)=\int_1^A \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln A$，$G(A)=\int_1^A \pi\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\pi-\frac{\pi}{A}$，所以

$\lim\limits_{A\to+\infty} F(A)=+\infty$，　$\lim\limits_{A\to+\infty} G(A)=\pi$.

**附录：一元微积分内容总结**

一、两类概念

1．反映函数局部性质的概念：　极限、连续、可导（导数)、可微（微分)、极值（点）等.

2．反映函数整体性质的概念：　有界性、单调性、奇偶性、周期性、凹凸性、最值、原函数、定积分等.

二、三种运算

1．极限运算：四则运算、重要极限、等价无穷小代换、无穷大与无穷小的关系、导数定义、洛必达法则等.

2．求导运算：定义、基本导数公式、导数的四则运算、复合函数的链导法则、变限定积分函数的导数公式.

3．积分运算

（1）不定积分运算：基本积分公式、换元积分法、分部积分法

（2）定积分运算：定义与性质、几何意义、牛—莱公式、换元积分法、分部积分法

三、几个应用

1．单调性、极值、最值问题（不等式、方程的根）

2．凹凸性、拐点问题

3．平面图形的面积问题