第五部分 线性代数

【考试情况总结】线性代数共 38 题

- 一、行列式问题（5 道）
- 二、矩阵问题（11 道）
- 1．矩阵的运算及其性质（6 道） 2．矩阵的逆（3 道）
- 3．矩阵的秩（2 道）
- 三、向量组（6 道）
- 1． 向量组的线性表示（2 道） 2．线性相关与线性无关（2 道）
- 3．秩与极大线性无关组（2 道）
- 四、线性方程组（7 道）
- 1．齐次线性方程组（4 道） 2．非齐次线性方程组（3 道）
- 五、特征值与特征向量（9 道）
- 1．基本概念与性质（4 道） 2．相似矩阵与可对角化的充要条件（5 道）

第 1 章 行列式

[内容综述]

1．行列式的概念

（1）二阶行列式的定义：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$；

（2）三阶行列式的定义：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix};$$

（3）余子式与代数余子式：在n阶行列式中，划去元素a_{ij}所在的第i行第j列，剩余元素按原有位置构成的$n-1$阶行列式，称为a_{ij}的余子式，记为M_{ij}；令$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，称A_{ij}为a_{ij}的代数余子式；

（5）n阶行列式的定义：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}.$$

2．行列式的性质

（1）转置：转置以后行列式的值不变；（此性质说明：凡是对行成立的性质，对列也成立）

（2）行行互换：任意两行互换，行列式的值变号；（如果某两行相同，则行列式的值为零）

（3）行因子：行列式中如果某行元素有公因子，可以将公因子提到行列式外；（如果某行全为零，则行列式的值为零；如果某两行对应元素成比例，则行列式的值为零）

（4）按行拆开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

（5）一行的倍数加到另一行,行列式的值不变.

3．行列式展开性质

行列式的任意一行（列）元素与各自的代数余子式乘积之和等于行列式的值； 行列式的任意一行（列）元素与另一行（列）元素的代数余子式乘积之和等于零.

[常见问题]

问题 1：利用行列式的定义求行列式的值；

问题 2：利用行列式的性质求行列式的值或将行列式变形；

问题 3：利用行列式按行（列）展开求行列式的值.

注：利用矩阵运算与行列式的关系及特征值与行列式的关系求行列式的值也是常见的一类考题.

[典型例题]

例 1.（2003）行列式$\begin{vmatrix} 2 & -1 & x & 2x \\ 1 & 1 & x & -1 \\ 0 & x & 2 & 0 \\ x & 0 & -1 & -x \end{vmatrix}$展开式中$x^4$的系数是（　　）.

A．2　　B．-2　　C．1　　D．-1

答：A.

分析：本题主要考查了行列式的概念.

根据题意，按第一列展开得

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & x & 2x \\ 1 & 1 & x & -1 \\ 0 & x & 2 & 0 \\ x & 0 & -1 & -x \end{vmatrix} = -x\begin{vmatrix} -1 & x & 2x \\ 1 & x & -1 \\ x & 2 & 0 \end{vmatrix} + \cdots$$

$$= -x \times (-2x^3) + \cdots = 2x^4 + \cdots,$$

所以x^4的系数是2．故正确选项为 A.

例 2.（2005）设a,b,c是方程$x^3-2x+4=0$的三个根，则行列式

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$的值等于（　　）.

A．1　　B．0　　C．-1　　D．-2

答：B.

分析：本题主要考查了3次方程根的概念，及特殊行列式的求值问题.

根据题意可知

$$x^3-2x+4=(x-a)(x-b)(x-c)$$
$$=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc,$$

所以$a+b+c=0$，从而

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 0.$$

故正确选项为 B.

例 3．已知 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 2$，则 $\begin{vmatrix} 3a_{31} & a_{11}+2a_{21} & a_{11} \\ 3a_{32} & a_{12}+2a_{22} & a_{12} \\ 3a_{33} & a_{13}+2a_{23} & a_{13} \end{vmatrix}$ 的值等于（　　）.

A．6　　B．12　　C．-6　　D．-12

答：D.

分析：本题主要考查了行列式的常用性质.

$$\begin{vmatrix} 3a_{31} & a_{11}+2a_{21} & a_{11} \\ 3a_{32} & a_{12}+2a_{22} & a_{12} \\ 3a_{33} & a_{13}+2a_{23} & a_{13} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3a_{31} & a_{11} & a_{11} \\ 3a_{32} & a_{12} & a_{12} \\ 3a_{33} & a_{13} & a_{13} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3a_{31} & 2a_{21} & a_{11} \\ 3a_{32} & 2a_{22} & a_{12} \\ 3a_{33} & 2a_{23} & a_{13} \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 2\times 3\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = -6\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -6\times 2 = -12 .$$

例 4.（2009）不恒为零的函数 $f(x) = \begin{vmatrix} a_1+x & b_1+x & c_1+x \\ a_2+x & b_2+x & c_2+x \\ a_3+x & b_3+x & c_3+x \end{vmatrix}$（　　）

A．没有零点　　B．至多有1个零点

C．恰有2个零点　　D．恰有3个零点

分析：本题是线性代数中行列式部分的问题，考查了行列式的性质.

$$f(x)=\begin{vmatrix} a_1+x & b_1+x & c_1+x \\ a_2+x & b_2+x & c_2+x \\ a_3+x & b_3+x & c_3+x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1+x & b_1-a_1 & c_1-a_1 \\ a_2+x & b_2-a_2 & c_2-a_2 \\ a_3+x & b_3-a_3 & c_3-a_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1-a_1 & c_1-a_1 \\ a_2 & b_2-a_2 & c_2-a_2 \\ a_3 & b_3-a_3 & c_3-a_3 \end{vmatrix}+x\begin{vmatrix} 1 & b_1-a_1 & c_1-a_1 \\ 1 & b_2-a_2 & c_2-a_2 \\ 1 & b_3-a_3 & c_3-a_3 \end{vmatrix},$$

所以$f(x)$至多有一个零点．正确选项为 B．

例 5．已知行列式$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$，$A_{21},A_{22},A_{23},A_{24}$是其第$2$行各元素对应的代数余子式，那么$A_{21}-A_{22}-A_{23}+A_{24}$的值为（　　）．

A．1　　　B．0　　　C．-1　　　D．-2

答：B．

分析：本题主要考查了代数余子式的性质及行列式按行展开定理．

由于第2行各元素对应的代数余子式与第2行的元素无关，所以$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$与$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$第$2$行各元素对应的代数余子式相同，从而

$$A_{21}-A_{22}-A_{23}+A_{24}=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\ 1 & -1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & -2 & 1\\ -1 & 1 & 1 & 3\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}1 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 3 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{vmatrix}=0.$$

例 6.（2008）若线性方程组$\begin{bmatrix}1 & 1 & a\\ 1 & -1 & 2\\ -1 & a & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$有无穷多解，则

$a=$（ ）.

A. 1或4　　B. 1或-4　　C. -1或4　　D. -1或-4

分析：本题考查了齐次方程组有非零解的条件和简单行列式求值.

方程组$\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 1 & -1 & 2\\ -1 & a & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$有无穷多解，即

$\begin{vmatrix}1 & 1 & a\\ 1 & -1 & 2\\ -1 & a & 1\end{vmatrix}=a^2-3a-4=(a+1)(a-4)=0$，所以 $a=-1$ 或

$a=4$. 故正确选项为 C.

注：选项验证法. 若 $a=1$，则

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$满秩，与条件矛盾；

若$a=4$，则$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}$秩为2，满足条件．故正确选项为 C．

第 2 章 矩阵

[内容综述]

1．矩阵的概念：$m \times n$矩阵、零矩阵、负矩阵、同型阵、矩阵相等、对角阵、数量阵、单位阵、三角阵、对称阵等．

2．矩阵的运算

（1）加法：$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix},$$

矩阵加法满足交换律、结合律；

（2）数乘：

$$k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix},$$

矩阵的数乘运算满足：$(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$；$(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$；$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$；

（3）乘法：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

，

其中$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{ik}b_{kj}$；矩阵的乘法运算满足结合律，左（右）乘分配律，及$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$，$E_m A_{m\times n} = A$，$A_{m\times n}E_n = A$等；应特别注意矩阵乘法不满足交换律和消去律；

（4）转置：$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

转置运算满足$(A^T)^T = A$，$(A+B)^T = A^T + B^T$，$(\lambda A)^T = \lambda A^T$，$(AB)^T = B^T A^T$等；

（5）方阵的行列式 ，如$\left|A^T\right| = |A|$，$|\lambda A| = \lambda^n |A|$，$|AB| = |A||B|$等.

3．逆矩阵

（1）定义：$AA^{-1}=A^{-1}A=E$；

（2）可逆的充要条件：$\left|A\right|\neq 0$；

（3）可逆矩阵的性质：$(A^{-1})^{-1}=A$，$(\lambda A)^{-1}=\dfrac{1}{\lambda}A^{-1}(\lambda\neq 0)$，$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$，$(A^{T})^{-1}=(A^{-1})^{T}$等；

（4）伴随矩阵：$A^{*}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$，满足 $AA^{*}=A^{*}A=\left|A\right|E$；

4．矩阵的初等变换

（1）矩阵的初等行（列）变换：交换两行（列），用一个非零常数乘某一行（列），将某行（列）的k倍加到另一行（列）上去；

（2）利用初等行变换求逆矩阵：$(A|E)\to(E|A^{-1})$.

5．矩阵的秩

（1）定义：在$m\times n$矩阵A中，任取k行k列，位于这k行k列交叉处的k^2个元素按原有次序组成一个k阶行列式，称为矩阵A的一个k阶子式；若矩阵A中有某个r阶子式不为零，而所有$r+1$阶子式全为零，则称矩阵A的秩为r．对于n阶方阵A，如果$r(A)=n$，则称A是满秩方阵（矩阵）.

（2）性质

A．A满秩$\Leftrightarrow \left|A\right| \neq 0$，$r(A)=0 \Leftrightarrow A=0$，$r(A_{m\times n}) \leq \min\{m,n\}$；

B．对矩阵施行初等变换，不改变矩阵的秩；

C．$r(A)=r(A^T)$，$r(kA)=r(A)(k\neq 0)$；

D．$r(AB)\leq r(A)$，$r(AB)\leq r(B)$；

E．$r(A+B)\leq r(A)+r(B)$；

F．若P,Q可逆，则$r(PA)=r(A),r(AQ)=r(A)$.

[常见问题]

问题 1：矩阵的运算问题，如求矩阵和、矩阵积、矩阵的方次等；

问题 2：利用矩阵运算与行列式的关系求方阵的行列式，注意数乘阵、乘积阵、转置阵、逆矩阵、伴随阵的行列式与原矩阵行列式的关系；

问题 3：与伴随阵有关的问题；

问题 4：与逆矩阵有关的问题，注意求逆矩阵的常用方法：利用伴随阵的公式、初等行变换、利用逆矩阵的定义；

问题 5：与矩阵秩有关的问题.

注：求解矩阵方程的问题、求方阵行列式的问题、判断矩阵是否可逆的问题、求逆矩阵的问题、求矩阵秩的问题等.

[典型例题]

例 1．设A,B均是n阶矩阵，则

（1）$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$；

（2）$(A-B)(A+B)=A^2-B^2$；

（3）$(A-E)(A+E)=(A+E)(A-E)$；

（4）$A^kA^l=A^lA^k$.

上述命题中，正确的命题有（　　）.

A．0个　　B．1个　　C．2个　　D．3个

答：C.

分析：本题主要考查了矩阵乘法运算的运算性质.

一般地$AB \neq BA$，所以命题（1）（2）不真；由于$AE = EA$，所以命题（3）为真；矩阵乘法运算的结合律说明命题（4）为真．故正确选项为 C.

例 2.（2003）设$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$，则必有（　　）.

A．$AB = BA$　　B．$AB = B^T A^T$

C．$|BA| = -8$　　D．$|AB| = 0$

答：D.

分析：本题主要考查了乘积矩阵的秩与原来矩阵秩的关系及方阵行列式等于零的充要条件.

因为$r(A) = 2, r(B) = 2$，所以

$r(AB) \le \min\{r(A), r(B)\} = 2 < 3$，从而$|AB| = 0$.

故正确选项为 D.

注：本题也可以利用选项验证的思想求解．由于2阶方阵不可能等于3阶方阵，所以排除掉选项 A；通过计算可知AB不是对称阵，故又排除了选项 B；计算可知$|AB| = 0$.

例 3．（2004）设$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&2\\0&1&3\end{pmatrix}$，$C=AB^{-1}$，则矩阵$C^{-1}$中，第3行第2列的元素是（　　）.

A．$\frac{1}{3}$　　　B．$\frac{1}{2}$　　　C．1　　　D．$\frac{3}{2}$

答：B.

分析：本题主要考查了矩阵运算的概念和性质.

因为$C^{-1}=BA^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&2\\0&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$，根据矩阵乘积的定义，矩阵$C^{-1}$中第3行第2列的元素是$0+\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$. 故正确选项为 B.

例 4．设$\alpha=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)^T$，$A=E-\alpha\alpha^T$，$B=E+2\alpha\alpha^T$，则$AB=$（　　）.

A．E　　　B．$-E$　　　C．O　　　D．A

答：D.

分析：本题主要考查了特殊矩阵的乘积与矩阵乘法的结合律.

$$AB=\left(E-\alpha\alpha^T\right)\left(E+2\alpha\alpha^T\right)=E-\alpha\alpha^T+2\alpha\alpha^T-2\alpha\alpha^T\alpha\alpha^T$$
$$=E+\alpha\alpha^T-2\alpha\left(\alpha^T\alpha\right)\alpha^T=E-\alpha\alpha^T=A,$$

故正选项为 D.

例 5.（2011．22）在$\left(x_1\quad x_2\quad x_3\right)\begin{pmatrix}1&0&-2\\2&4&-1\\0&-3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$的展开式中，$x_2x_3$项的系数是（　　）.

A. 3　　B. 2　　C. -2　　D. -4

答：D.

分析：本题主要考查了特殊矩阵的乘法.

$$\left(x_1\quad x_2\quad x_3\right)\begin{pmatrix}1&0&-2\\2&4&-1\\0&-3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$=(x_1+2x_2,4x_2-3x_3,-2x_1-x_2+5x_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$=\cdots+(-3-1)x_2x_3+\cdots=\cdots-4x_2x_3+\cdots$$

例 6．设A,B,C都是n阶矩阵，满足$ABC=E$，则（　　）.

A. $BCA=E$　　B. $ACB=E$

C. $BAC=E$　　D. $CBA=E$

答：A.

分析：本题主要考查了矩阵可逆和逆矩阵的概念.

$ABC=E$ 说明 $A^{-1}=BC$ 和 $C^{-1}=AB$，所以有 $BCA=E$ 和 $CAB=E$．故正确选项为A.

例7.已知n阶方阵A满足 $A^3+A^2-2A=0,$则下列矩阵中一定可逆的是（　　）.

A．A　　B．$A+E$　　C．$A-E$　　D．$A+2E$

答：B.

分析：本题主要考查了逆矩阵的定义.

因为$A^3+A^2-2A=O$，所以$A^3+A^2-2A-2E=-2E$，从而$(A+E)(A^2-2E)=-2E$，故矩阵$A+E$一定可逆.及正确选项为B.

例8．设$A=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&2&1\\1&0&1\end{pmatrix}$，则$\left|A^{-1}+A^*\right|=$（　　）.

A．$-\dfrac{3}{4}$　　B．$-\dfrac{1}{4}$　　C．$\dfrac{3}{4}$　　D．$\dfrac{27}{4}$

答：D.

分析：本题主要考查了矩阵运算与行列式的关系.

由于$|A|=\begin{vmatrix}1&0&3\\0&2&1\\1&0&1\end{vmatrix}=-4$，所以$\left|A^*\right|=(-4)^2=16$，从而

$$\left|A^{-1}+A^*\right|=\left|\frac{A^*}{|A|}+A^*\right|=\left(\frac{1}{|A|}+1\right)^3\left|A^*\right|=\left(\frac{3}{4}\right)^3\times 16=\frac{27}{4},$$

即正确选项为D.

例9．设A,B都是n阶非零矩阵，且$AB=O$，则A和B的秩（　　）.

A．必有一个等于零　　　　　　B．都小于n

C．一个小于n，一个等于n　　　　D．都等于n

答：B．

分析：本题主要考查了矩阵秩的性质．

因为 $AB=O$，所以$r(A)+r(B)\leq n$，又因为A,B都是n阶非零矩阵，所以$r(A)\geqslant 1,\ r(B)\geqslant 1$，从而可知正确选项为 B．

注：本题也可以利用排除法求解．因为A,B都是n阶非零矩阵，所以$r(A)\geqslant 1,\ r(B)\geqslant 1$，从而排除了选项 A；又若设 $r(A)=n$，则矩阵A可逆，从而由$AB=O$便得$B=O$，这与条件矛盾，这样可以排除选项 C，D．

例 10．（2010）已知$A=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}(1\ \ -1\ \ 0)$，$B=\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&a&1\\-1&3&0\end{pmatrix}$，若矩阵$AB+B$的秩为$2$，则$a=$（　　）．

A．-5　　　　B．-1　　　　C．1　　　　D．5

答：A．

分析：因为$\left|A+E\right|=\begin{vmatrix}2&-1&0\\0&1&0\\2&-2&1\end{vmatrix}=2$，所以$A+E$可逆．由$r(AB+B)=2$知$r(B)=2$．

由于$B=\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&a&1\\-1&3&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&a+2&-3\\0&2&2\end{pmatrix}$，由二、三行成比例得$a=-5$.

例 11.（2007）A^*是$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$的伴随矩阵．若三阶矩阵$X$满足$A^*X=A$，则$X$的第3行的行向量是（　　）

A．$\begin{pmatrix}2&1&1\end{pmatrix}$　　B．$\begin{pmatrix}1&2&1\end{pmatrix}$

C．$\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$　　D．$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}$

分析（本题考查了伴随矩阵的概念、矩阵与其伴随矩阵的关系、以及矩阵的乘法运算）

因为$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$，所以$|A|=2$，从而$A$可逆．由$A^*X=A$，及$A^*=|A|A^{-1}=2A^{-1}$，得

$$X=\frac{1}{2}A^2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}&&\\&&\\1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

故选（C）.

例 12.（2006）设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, E 为三阶单位矩阵，若三阶矩阵 Q 满足关系 $AQ+E=A^2+Q$，则 Q 的第一行的行向量是（C）.

A．$(1\quad 0\quad 1)$　　B．$(1\quad 0\quad 2)$

C．$(2\quad 0\quad 1)$　　D．$(2\quad 0\quad 2)$

分析：因为 $AQ+E=A^2+Q$，所以 $(A-E)Q=A^2-E=(A-E)(A+E)$，从而 $Q=A+E$，故 Q 的第一行的行向量是 $(2\quad 0\quad 1)$.

第 3 章 向量组

[内容综述]

1．n 维向量的概念与运算：n 维向量、向量的相等、向量的加法、向量的数乘等.

2．向量组的线性相关与线性无关

（1）线性表示：设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 为一组向量，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 为一组数，则 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_k\alpha_k$ 称为向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 的一个线性组合；若 $\beta=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_k\alpha_k$，则称 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 线性表示.

（2）线性相关与线性无关：设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 为一组向量，如果存在不全为零的数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$，使得 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_k\alpha_k=0$，则称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 线性相关；否则称为线性无关.

注：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 线性相关的充要条件是方程组

$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_k\alpha_k=0$有非零解；$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$线性无关的充要条件是方程组$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_k\alpha_k=0$只有零解.

（3）常用结论

A．含有零向量的组一定相关；

B．两个向量相关的充要条件是对应分量成比例；

C．部分相关，则全体相关；

D．无关的组添加分量后仍无关；

E．$n+1$个n维向量必相关；

F．n个n维向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$相关$\Leftrightarrow\left|\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right|=0$

G．若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$无关，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k,\beta$相关，则$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$惟一表示；

H．向量组线性相关的充要条件是其中有某个向量能被其余向量线性表示.

3．向量组的极大线性无关组与向量组的秩

（1）定义：设向量组$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$的一个部分组，满足：

1）$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$线性无关；2）向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$可由向量组$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$线性表示，则称部分组$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$的一个极大无关组，$r$称为向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$的秩.

（2）矩阵的秩与向量组的秩的关系：矩阵的行秩＝矩阵的列秩＝矩阵的秩.

（3）向量组的秩与极大线性无关组的求法

第一步：将向量组依次按列写成矩阵；

第二步：对矩阵作行初等变换，化为行阶梯形；

第三步：主元所在的列向量构成一个极大无关组，非零行向量的行数就是向量组的秩.

[常见问题]

问题 1：求向量组的极大线性无关组或秩的问题；

问题 2：判断向量组线性相关或无关的问题；

问题 3：利用向量组线性相关或无关讨论矩阵是否可逆或线性方程组解的存在问题.

[典型例题]

例 1．设向量组 $\alpha_1=\{1,1,-1,0\}^T,\alpha_2=\{0,1,1,1\}^T,\alpha_3=\{2,3,-1,1\}^T,\alpha_4=\{2,2,-2,0\}^T$，向量组的一个极大线性无关组是（　　）.

A．α_1　　B．α_1，α_4　　C．α_1，α_2　　D．α_1，α_2，α_3

答：C.

分析：本题主要考查了极大线性无关组的一般求法.

因为 $$\begin{pmatrix}1&0&2&2\\1&1&3&2\\-1&1&-1&-2\\0&1&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&2\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&2\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

所以极大线性无关组是 α_1，α_2 或 α_1，α_3．故正确选项为 C.

例 2．（2006）已知向量组 α,β,γ 线性无关，则 $k\neq1$ 是向量组 $\alpha+k\beta,\beta+k\gamma,\alpha-\gamma$ 线性无关的（C）.

A． 充分必要条件 B． 充分条件，但非必要条件

C．必要条件，但非充分条件 D． 既非充分条件也非必要条件

分析：因为$\left(\alpha+k\beta,\beta+k\gamma,\alpha-\gamma\right)=\left(\alpha,\beta,\gamma\right)\begin{pmatrix}1&0&1\\k&1&0\\0&k&-1\end{pmatrix}$，当$\alpha+k\beta,\beta+k\gamma,\alpha-\gamma$线性无关时，$\begin{vmatrix}1&0&1\\k&1&0\\0&k&-1\end{vmatrix}=k^2-1\neq0$，所以$k\neq1$是向量组$\alpha+k\beta,\beta+k\gamma,\alpha-\gamma$线性无关的必要条件但非充分条件．

例 3．设向量组α,β,γ线性无关，而α,β,δ线性相关，则（ ）．

A．α必能被β,γ,δ线性表出 B．β必不能被α,γ,δ线性表出

C．δ必能被α,β,γ线性表出 D．δ必不能被α,β,γ线性表出

答：C．

分析：本题考查了向量组线性相关和线性无关的性质．

因为α,β,δ线性相关，所以存在不全为零的k_1,k_2,k_3，使得$k_1\alpha+k_2\beta+k_3\delta=0$．由于$\alpha,\beta$线性无关，所以$k_3\neq0$，即$\delta$能被$\alpha,\beta$线性表示，从而能被$\alpha,\beta,\gamma$线性表示．故正确选项为 C．

注：若取$\delta=\beta$，则可排除选项 A，B，本题就变成了二选一的判断题．

例 4．设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是一个$n$维向量组，且$\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，$\beta_i=\alpha-\alpha_i\ (i=1,2,3,4)$，则 （ ）．

A．$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$

B．$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)>r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$

C．$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)<r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$

D．不能确定$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$与$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$的关系

答：A.

分析：本题主要考查了向量组线性表示的矩阵形式及矩阵乘积的秩与原来矩阵秩的关系.

因为$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$，且矩阵

$$\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3&3&3&3\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

可逆，所以$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$．故正确选项为 A.

例 5．设向量组$\alpha_1=(1,2,-1)^T,\alpha_2=(2,5,3)^T,\alpha_3=(1,3,4)^T$，下列向量中不能被$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出的是（　　）.

A．$(1,2,3)^T$　　B．$(1,3,4)^T$　　C．$(0,0,0)^T$　　D．上述结论均不正确

答：A.

分析：本题主要考查了向量组线性相关与线性无关的概念和性质.

由条件易知$\alpha_2=\alpha_1+\alpha_3$，且$\begin{vmatrix}1&1&1\\2&2&3\\3&-1&4\end{vmatrix}\neq 0$，这说明向量组$(1,2,3)^T$，$\alpha_1,\alpha_3$线性无关，故$(1,2,3)^T$不能被$\alpha_1,\alpha_3$线性表出，从而也不能被$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出．即正确选项为 A.

注：本题中，$(1,3,4)^T$ 和$(0,0,0)^T$能被$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出是显然的，故只需讨论$(1,2,3)^T$能否被$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出便可.

例 6.（2010） 设向量组$S=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$线性无关，下列向量组中，与$S$等价的有（ ）个.

①$\alpha_1-\alpha_3,\alpha_2-\alpha_3$ ②$\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$

③$\alpha_1-\alpha_3,\alpha_1+\alpha_3,2\alpha_1,3\alpha_3$ ④$\alpha_1-\alpha_3,\alpha_1+\alpha_3,2\alpha_2,3\alpha_3$

A．1 B．2 C．3 D．4

答：B.

分析：由于向量组①和③的秩最大是2，所以其不可能与$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$等价.

由于②$\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$及④$\alpha_1-\alpha_3,\alpha_1+\alpha_3,2\alpha_2,3\alpha_3$与向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$都能相互线性表示，所以它们与向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$等价.

第 4 章 线性方程组

［内容综述］

1．克莱姆法则

2．齐次线性方程组

（1）基本概念

设n元齐次线性方程组（*）$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \qquad\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0, \end{cases}$

$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$称为方程组（*）的系数矩阵.

令$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，则方程组（*）可表为矩阵形式$Ax=0$；令$\alpha_1=(a_{11},a_{21},\cdots,a_{m1})^T$，$\alpha_2=(a_{21},a_{22},\cdots,a_{m2})^T$，$\cdots,\alpha_n=(a_{1n},a_{2n},\cdots,a_{mn})^T$则方程组（*）可表为向量形式$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0$.

（2）齐次线性方程组有非零解的充要条件：$Ax=0$有非零解的充要条件是$r(A)<n$（A为$m\times n$矩阵）. 当A为n阶方阵时，$Ax=0$有非零解的充要条件是$|A|=0$.

注：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$线性相关$\Leftrightarrow Ax=0$有非零解，其中$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)$.

（3）解的性质： 若ξ_1,ξ_2是$Ax=0$的解，则$k_1\xi_1+k_2\xi_2$仍为$Ax=0$的解，其中k_1,k_2是任意常数.

（4）解的结构

A.基础解系：如果$Ax=0$有非零解，则$Ax=0$有基础解系. $Ax=0$的基础解系是这样一组向量：首先它们都是$Ax=0$的解向量，其次它

们是线性无关的，第三每一个解都可由它们线性表示.

B．设A为$m\times n$矩阵，则$Ax=0$的基础解系中含有$n-r(A)$个向量.

C．若$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$是$Ax=0$的一组基础解系，则$Ax=0$的通解（一般解）为

$$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r},$$

其中$k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$是任意常数.

3．非齐次线性方程组

（1）基本概念

设n元非齐次线性方程组（**）$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases}$

$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$称为方程组（**）的系数矩阵.

令$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，$b=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^T$则方程组（**）可表为矩阵形式$Ax=b$，

$\overline{A}=(A|b)$称为方程组（**）的增广矩阵．令$\alpha_1=(a_{11},a_{21},\cdots,a_{m1})^T$，$\alpha_2=(a_{21},a_{22},\cdots,a_{m2})^T$，$\cdots,\alpha_n=(a_{1n},a_{2n},\cdots,a_{mn})^T$，则方程组（**）可表为向量形式$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=b$.

（2）非齐次线性方程组有解的充要条件

A． $Ax=b$ 有解 $\Leftrightarrow r(A|b)=r(A)$；

B．当 $r(A|b)=r(A)=n$ 时，n 元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有唯一解；

当 $r(A|b)=r(A)<n$ 时，n 元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多解.

（3）解的性质：若 ξ_1,ξ_2 是 $Ax=b$ 的解，则 $k_1\xi_1+k_2\xi_2$ 是 $Ax=(k_1+k_2)b$ 的解，特别地 $\xi_1-\xi_2$ 是 $Ax=0$ 的解.

（4）解的结构：设 n 元非齐次线性方程组 $Ax=b$，$r(A|b)=r(A)=r$. 若 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是 $Ax=0$ 的一个基础解系，η 是 $Ax=b$ 的任意特解，则 $Ax=b$ 的通解（一般解）为

$$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}+\eta,$$

其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 是任意常数.

[常见问题]

问题 1：齐次方程组有非零解的问题；

问题 2：非齐次方程组有解或有无穷多解的问题；

问题 3：判断向量组是否是基础解析的问题；

问题 4：齐次方程组或非齐次方程组解的表示问题.

[典型例题]

例 1.（2003）A 为 $m\times n$ 的非零矩阵，方程组 $Ax=0$ 只有零解的充分必要条件是（　　）.

A． A 的列向量组线性无关　　B． A 的列向量组线性相关

C． A 的行向量组线性无关　　D． A 的行向量组线性相关

答：A.

分析：本题主要考查了齐次方程组只有零解的充分必要条件.

方程组 $Ax=0$ 只有零解等价于 $r(A)=n$，即列向量组满秩，故其线性无关，所以正确选项为 A.

例 2.（2004）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&6&x\\3&0&-6\end{pmatrix}$，三阶矩阵 $B\neq O$，且满足 $AB=O$，则（　　）.

A. $x=-8$，B 的秩 $=1$　　　　B. $x=-8$，B 的秩 $=2$

C. $x=8$，B 的秩 $=1$　　　　D. $x=8$，B 的秩 $=2$

答：A.

分析：主要考查了齐次方程组存在非零解的充分必要条件和齐次方程组基础解系的概念.

根据题意可知方程组 $AX=0$ 有非零解，所以 $|A|=\begin{vmatrix}1&-2&2\\-2&6&x\\3&0&-6\end{vmatrix}=-48-6x=0$，故 $x=-8$. 又由于 $r(A)=2$，所以 $AX=0$ 的基础解系的秩为 1，由 $B\neq O$，且 B 的列向量组能被基础解系线性表示，所以 B 的秩 $=1$. 故正确选项为 A.

例 3.（2007）设 $A=\begin{pmatrix}1&1&\alpha\\0&1&-1\\1&\alpha^2&-1\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}-1&-1&\alpha\end{pmatrix}^T$，则当 $\alpha=$（ D ）时方程组 $AX=b$ 无解.

A．-2　　B．-1　　C．1　　D．2

分析（本题考查了非齐次线性方程组解无解的条件和矩阵的行初等变换）

由于

$$\left(A|b\right)=\begin{pmatrix}1 & 1 & \alpha & -1\\ 0 & 1 & -1 & -1\\ 1 & \alpha^2 & -1 & \alpha\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & \alpha & -1\\ 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & \alpha^2-1 & -1-\alpha & \alpha+1\end{pmatrix},$$所以

当$\alpha^2-1=\alpha+1\neq-(\alpha+1)$，即$\alpha=2$时，$r(A)=2,\ r(\overline{A})=3$，这时方程组无解．故选（D）．

例 4．(2009)已知$A=(a_{ij})$为3阶矩阵，$A^TA=E$（A^T是A的转置矩阵，E是单位矩阵）．若$a_{11}=-1$，$b=(1,0,0)^T$，则方程组$AX=b$的解$X=$（　　）．

A．$(-1,1,0)^T$　　B．$(-1,0,1)^T$　　C．$(-1,-1,0)^T$

D．$(-1,0,0)^T$

分析：本题是线性代数中矩阵与方程组部分的问题，考查了矩阵的运算（转置、乘法、逆矩阵）与方程组解的概念．

因为$A^TA=E$，所以$A^{-1}=A^T$，且A的行向量与列向量均是单位向量，又$a_{11}=-1$，所以$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & a_{22} & a_{23}\\ 0 & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$．

由 $Ax=b$ 得 $x=A^{-1}b=A^Tb=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&a_{22}&a_{32}\\0&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$. 正确选项为 D.

注：特殊值代入法. 取 $A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 $A^TA=E$，且

$$x=A^Tb=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

例 5. 设 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, $\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系，则系数矩阵可能是（　　）.

A. $\begin{pmatrix}-2&1&1\\4&-2&-2\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&1&-1\\4&-2&-2\end{pmatrix}$　　D. 以上都不正确

答：A.

分析：本题主要考查了齐次方程组基础解系的概念.

根据基础解系的概念，只要验证哪个矩阵的秩为1，且与 ξ_1,ξ_2 的乘

积为零向量便可．易知$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$的秩为$1$，且

$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，故正确选项为 A.

注：由于选项 B，C 中矩阵的秩分别为2和3，故本题只需验证选项 A 便可.

例 6．设$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{pmatrix}$，且$r(A)=2$，则$A^*X=0$的通解是（　　）.

A．$k_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$　　B．$k_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$　　C．$k_1\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ c \end{pmatrix}$　　D．$k_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$

（k_1,k_2为任意常数）

答：D.

分析：本题主要考查了伴随阵的性质和齐次方程组基础解系的概念.

因为$r(A)=2$，所以$r(A^*)=1$，故$A^*X=0$的基础解系的秩为2.

又因为$A^*A=O$，所以A的列向量均是$A^*X=0$的解，而$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$

线性无关，所以$A^*X=0$的通解是$k_1\begin{pmatrix}1\\0\\a\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}2\\1\\b\end{pmatrix}$.

例 7．设A是5×4矩阵，b是5维列向量，$r(A)=3$，X_1,X_2,X_3是方程组$AX=b$的三个解向量，且满足$X_1+X_2=(1,2,-1,0)^T,X_1+X_3=(0,1,2,-3)^T$，则方程组$AX=b$的通解为（　　）.（其中$k_1,k_2$为任意常数）

A．$k_1\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}$　　B．$k_1\begin{pmatrix}1\\1\\-3\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$

C．$k_1\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\1\\2\\-3\end{pmatrix}$　　D．以上结果均不正确

答：B.

分析：本题主要考查了线性方程组解的性质、齐次方程组基础解系的概念和非齐次方程组解的结构.

根据条件可知$AX=0$的基础解系只含有一个解向量．由于

$$\left(X_1+X_2\right)-\left(X_1+X_3\right)=(1,2,-1,0)^T-(0,1,2,-3)^T=\left(1,1,-3,3\right)^T$$

，

是方程组 $AX=0$ 的非零解，故是一个基础解系.

又 $\frac{1}{2}\left(X_1+X_2\right)=\frac{1}{2}(1,2,-1,0)^T=\left(\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2},0\right)^T$ 是方程组 $AX=b$ 的一个特解，所以 $AX=b$ 的通解是 $k_1\begin{pmatrix}1\\1\\-3\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$. 即正确选项为 B.

第 5 章 特征值 特征向量

[内容综述]

1．特征值和特征向量

（1）概念：设 A 为 n 阶方阵，如果有数 λ 和非零向量 $x\neq 0$，使 $Ax=\lambda x$，则称 λ 为方阵 A 的特征值，x 为 A 的属于 λ 的特征向量.

（2）计算

A. $\left|\lambda A-I\right|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$ 称为 A 的特征多项式，特征多项式的根就是特征值（特征根）;

B. 设 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$，求解齐次方程组 $(\lambda_i I-A)x=0$，

其非零解就是A的属于λ_i的特征向量（$1 \leqslant i \leqslant k$）.

注：若α,β是A的属于λ的特征向量，则对实数a,b，$a\alpha+b\beta(\neq 0)$也是A的属于λ的特征向量.

（3）性质

A．$\prod \lambda_i = \det A$；

B．A与A^T有相同的特征多项式；

C．若λ是A的特征值，则λ^k是A^k的特征值（k为正整数），$f(\lambda)$是$f(A)$的特征值，当A

可逆时，$\dfrac{1}{\lambda}$是A^{-1}的特征值；

D．属于不同特征值的特征向量是线性无关的.

2．相似矩阵

（1）概念：设A为n阶方阵，如果有可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$，则称B与A相似.

（2）性质：相似矩阵有相同的秩，相同的特征值.

（3）n阶方阵相似于对角矩阵（可对角化）的条件

A．n阶方阵A相似于对角矩阵$\Leftrightarrow A$有n个线性无关的特征向量；

B．n阶方阵A相似于对角矩阵$\Leftrightarrow A$的每个特征值的重数等于该特征值所对应的线性无关的特征向量的个数.

[常见问题]

问题 1：直接利用特征值与特征向量的定义处理的问题；

问题 2：利用特征值与特征向量的性质处理的问题；

问题 3：判断两矩阵是否相似的问题；

问题 4：判断一个矩阵是否可对角化的问题.

[典型例题]

例 1．设 $X=(1,-1,2)^T$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&b&a\\2&a&1\end{pmatrix}$ 的一个特征向量，则

a,b 的值分别为（　　）.

A．$2,4$　　　B．$4,2$　　　C．$-2,-4$　　　D．$-4,-2$

答：D.

分析：本题主要考查了特征值和特征向量的概念.

由 $\begin{pmatrix}2&2&2\\2&b&a\\2&a&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2-b+2a\\4-a\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$，得

$\begin{cases}2-b+2a=-4,\\4-a=8,\end{cases}$ 解得 $a=-4,b=-2$.

例 2．（2005）设 $A=\begin{pmatrix}3&-1&1\\2&0&1\\1&-1&2\end{pmatrix}$，则 A 的对应于特征值 2 的一个特征向量是（　　）.

A．$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$　　B．$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$　　C．$\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$　　D．$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

分析：本题主要考查了特征值和特征向量的概念．本题的设问方式为

我们利用验证法寻找正确选项提供了便利.

因为$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ \\ \end{pmatrix} \neq 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ \\ \end{pmatrix} \neq 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ \end{pmatrix} \neq 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

所以选项 A，B，C 都不正确. 故正确选项为 D.

注：因为选择题的目的只是找到正确选项，在做题的过程中只要得到了够用的信息就可以了，没必要把所有的步骤都写出. 例如本题利用

$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ & & -1 \\ & & \end{pmatrix}$就足以找到正确选项.

例 3.（2006）矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，若 A 的特征值和 B 的特征值对应相等，则其中（ B ）.

A. $x = 1, y = 1$　　B. $x = 0, y = 1$

C. $x = -1, y = 0$　　D. $x = 0, y = -1$

分析：方阵 B 的特征值为 $2,y,-1$，由

$$\left|A-\lambda E\right|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & 1\\ 0 & 1 & x-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)[\lambda(\lambda-x)-1]=0$$ 对

$\lambda=-1$成立得$x=0$．从而可知方阵A的特征值为$2,1,-1$，所以$y=1$．

例 4．设X_1,X_2是三阶矩阵A的属于λ_1的两个线性无关的特征向量，X_3是A的属于λ_2的特征向量，且$\lambda_1\neq\lambda_2$，则（　　）．（其中k_1,k_2为任意常数）

A．$k_1X_1+k_2X_2$是A的特征向量

B．$k_1X_1+k_2X_3$是A的特征向量

C．X_1+X_2是$2A-E$的特征向量

D．X_1+X_3是$2A-E$的特征向量

答：C．

分析：本题考查了特征值与特征向量的概念和性质．

因为$(2A-E)(X_1+X_2)=(2\lambda_1-1)(X_1+X_2)$，且$X_1+X_2\neq 0$，所以$X_1+X_2$是$2A-E$的特征向量．故正确选项为 C．

注：$k_1X_1+k_2X_2$有可能是零向量，故排除掉选项 A．

例 5．（2008）设A^*是$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ 0 & 3 & 5\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$的伴随矩阵，则$A^*$的一个特征值为（　　）．

A. 3　　　　B. 4　　　　C. 6　　　　D. 9

分析：本题是线性代数题，考查了特殊矩阵行列式与特征值的计算、伴随阵与逆矩阵的关系和特征值的性质.

因为 $A=\begin{pmatrix}1&3&0\\0&3&5\\0&0&5\end{pmatrix}$，所以 $|A|=1\times3\times5=15$，$\lambda_1=1,\lambda_2=3,\lambda_3=5$.

由于 $A^*=|A|A^{-1}$，所以 A^* 的特征值为 $15,\frac{15}{3}=5,\frac{15}{5}=3$. 故正确选项为 A.

例 6.（2007）1与-1是矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&1&-2\\-t&-1&t\\4&1&-3\end{pmatrix}$的特征值，则当 $t=$（ B ）时矩阵 A 可对角化.

A. -1　　　　B. 0　　　　C. 1　　　　D. 2

分析（本题考查了特征值与特征向量的概念与矩阵可对角化的条件）

当 $\lambda=1$ 时，$A-\lambda E=\begin{pmatrix}2&1&-2\\-t&-2&t\\4&1&-4\end{pmatrix}$，秩为 2，即 $\lambda=1$ 对应着一个线性无关的特征向量；

当 $\lambda=-1$ 时，$A-\lambda E=\begin{pmatrix}4&1&-2\\-t&0&t\\4&1&-2\end{pmatrix}$，若 $t=0$，则秩为 1，这时

$\lambda=-1$对应两个线性无关的特征向量．所以A共有三个线性无关的特征向量，故可对角化．故选（B）.

或：设矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3$，则

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1+(-1)+\lambda_3=3+(-3)+(-1)=-1,$$

所以有 $\lambda_3=-1$．即$\lambda_2=-1$是重特征根.

矩阵 A 可对角化要求 $r\left(A-\lambda_2E\right)=1$，即要求

$$A+E=\begin{pmatrix}4 & 1 & -2\\ -t & 0 & t\\ 4 & 1 & -2\end{pmatrix}$$的秩为 1,

故$t=0$.

例 7.（2009)矩阵$B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, A是B的相似矩阵,则矩阵$A+E$（E是单位矩阵）的秩是（　B　）.

A．0　　　B．1　　　C．2　　　D．3

分析：本题是线性代数中特征值与特征向量部分的问题，考查了相似矩阵的概念、相似矩阵的性质及简单矩阵特征值的求法.

$$由\left|B-\lambda E\right|=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & 1\\ 0 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^2(\lambda+1)+(\lambda+1)$$

$=(\lambda+1)^2(1-\lambda)=0$得矩阵$B$的特征值为$-1,-1,1$．由于$A$与$B$相似，所以$A$的特征值也是$-1,-1,1$，从而$A+E$的特征值是$0,0,2$．故

$A+E$ 的秩为1.

例 8.（2011．25）若 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & a & 2 \end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似，则

$a=$（　　）.

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

答：A.

分析：本题主要考查了相似矩阵的性质.

由题意，2是矩阵B的一个重特征值，且$r(B-2E)=1$. 因为矩阵A与矩阵B相似，所以2也是A的重特征值，且

$r(A-2E)=r(B-2E)=1$.

又 $A-2E=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -2 & a & 0 \end{pmatrix}$，所以$a=-2$.